

Программа курса

«Теория функций комплексного переменного»

(I поток, 5 семестр 2022/23 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. \mathbb{R} -дифференцируемость и \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Примеры их выполнения и невыполнения.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция e^z , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое. конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
4. Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения $\bar{\mathbb{C}}$ на себя.
5. Круговое свойство ДЛО. Сохранение симметрии при ДЛО. Описание всех ДЛО единичного круга на себя.
6. Определение и свойства $\int_{\gamma} f(z) dz$ (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
7. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от $(z - a)^n$ по окружности с центром a . Отсутствие голоморфной первообразной у функции $1/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
8. Лемма Гурса. Теорема о существовании первообразной в круге. Определение области. Единственность первообразной в области.
9. Первообразная вдоль пути (определение, существование, свойства). Определение интеграла от голоморфной функции по любому непрерывному пути. Теорема Коши о гомотопии.
10. Определение односвязной области. Примеры односвязных и неодносвязных областей. Существование первообразной в односвязной области.
11. Определение ограниченной области с кусочно-гладкой границей. Теорема Коши об интеграле по границе области. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.
12. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
13. Теорема Лиувилля. Следствия (невозможность конформного отображения плоскости на круг, основная теорема алгебры).
14. Формула Коши–Адамара. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
15. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Разложения в степенные ряды (экспонента, логарифм, бином Ньютона, рациональные функции).
16. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры. Эквивалентность трех определений голоморфной функции.
17. Понятие порядка нуля. Изолированность нулей. Теорема единственности.
18. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.
19. Кольцо сходимости ряда по целым степеням $z - a$. Единственность разложения в такой ряд. Разложение функции $1/(z - 1)(z - 2)$ во всех кольцах с центром 0.
20. Неравенства Коши. Теорема Римана об устранимой особенности.

21. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.
22. Описание особенностей в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса. Теорема Сохоцкого.
23. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.
24. Формулы для подсчета вычетов в полюсах. Вычисление преобразования Фурье от $1/(x^2 + a^2)$ с помощью вычетов.
25. ∞ как изолированная особая точка: определение, классификация, описание в терминах ряда Лорана. Вычет в точке ∞ . Теорема о полной сумме вычетов.
26. Целые функции с полюсом на ∞ . Описание всех конформных отображений \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
27. Определение мероморфной функции. Мероморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$. Связь с разложением рациональной функции на простейшие дроби.
28. Теорема Вейерштрасса о рядах.
29. Разложение $1/\sin^2 z$ и $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби. Теорема Миттаг–Леффлера.
30. Сходимость бесконечных произведений. Разложение $\sin z$ в произведение.
31. Теорема Вейерштрасса о существовании голоморфных функций с заданными нулями. Представление мероморфной функции в виде частного двух голоморфных.
32. Определение элемента, канонического элемента, непосредственного аналитического продолжения (НАП). Свойства НАП. Пример нетранзитивности. Аналитическое продолжение по цепочке. Понятие полной аналитической функции (ПАФ).
34. Определение аналитического продолжения вдоль пути. Его свойства и эквивалентность аналитическому продолжению по цепочке. Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей.
35. Определение аналитической функции в области. Понятие числа листов. Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Аналитические функции с числом листов 1. Аналитические функции $\sqrt[n]{z}$ и $\ln z$.
36. Действия над аналитическими функциями (арифметические операции, композиция, сужение). Примеры распада результата на несколько аналитических функций. Пример ПАФ с разным числом элементов с центрами в разных точках.
37. Понятие ветви аналитической функции. Выделение ветвей и распадение на ветви. Теорема о монодромии. Лемма о корнях и логарифмах.
38. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Примеры. Эквивалентное описание классификации.
39. Разложение аналитической функции в ряд Пуизо.