Вопросы к экзамену по ТФКП

3 курс 1 поток, весенний семестр 2021/2022

1. Лемма Бореля–Каратеодори. Малая теорема Пикара и ее доказательство для целых функций класса $\widetilde{H}(\mathbb{C})$.

2. Однолистные функции. Критерий локальной однолистности.

3. Обратный принцип соответствия границ и однолистность голоморфной в выпуклой области функции с условием $\operatorname{Re} f' > 0$.

4. Достаточное условие однолистности голоморфной непостоянной в данной области D функции f с условием $f(z) \to \Gamma$ при $z \to \partial D$, где Γ — замкнутая жорданова кривая.

5. Принцип симметрии Римана–Шварца

6. Теорема Гурвица о нулях и теорема о локально равномерно сходящейся последовательности однолистных функций.

7. Классы $\mathcal{S}$ и Σ однолистных функций. Основные свойства функций этих классов. Функция Кёбе.

8. Теорема площадей для функций класса Σ.

9. Теорема Бибербаха (оценка $|a_2| \leqslant 2$ для функций класса S)

10. Теорема Кёбе (об 1/4).

11. Первая теорема растяжения для однолистных функций в круге.

12. Оценка Литтлвуда $|a_n| \leqslant en$ для функций класса $\mathcal{S}$.

13. Вычисление групп конформных автоморфизмов областей $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty$. Отсутствие конформной эквивалентности этих областей.

14. Локальная равномерная ограниченность и локальная равностепенная непрерывность семейств функций. Связь этих понятий для семейств голоморфных функций.

15. Понятие компактности семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Непрерывный функционал на компактном семействе функций.

16. Теорема Римана и ее доказательство.

17. Теорема Янишевского и ее комплексно-аналитическое доказательство.

18. Области с локально связными границами и теорема Каратеодори о непрерывном продолжении конформного отображения единичного круга на данную область.

19. Точки разреза. Жордановы области. Теорема Каратеодори о гомеоморфном продолжении конформного отображения единичного круга на данную область.

20. Гармонические функции и их основные свойства (теорема о среднем, принцип максимума и минимума).

21. Постановка задачи Дирихле для гармонический функций. Сохранение гармоничности при голоморфной замене переменных и метод конформного отображения для решения задачи Дирихле. Формулировка теоремы Лебега. Гармоничность непрерывной функции, удовлетворяющей в произвольном круге в данной области теореме о среднем.

22. Разложение гармонической функции в круге в ряд по однородным гармоническим многочленам. Аналог теоремы Вейерштрасса для гармонических функций.

23. Метод Фурье и формула Пуассона для решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге.

24. Элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение по цепочке и вдоль пути, их основные свойства.

25. Аналитическое продолжение по близким путям. Теорема об аналитическом продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии.

26. Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса (П.А.Ф.). Теорема Пуакаре–Вольтерра. Аналитические ветви П.А.Ф. и голоморфные ветви П.А.Ф.

27. Особые точки (аналитических ветвей) П.А.Ф. и их классификация. Полное описание П.А.Ф. на примерах $\operatorname{Ln} z$ и z^a.

28. Теорема об аналитическом продолжение первообразного элемента. Полное описание П.А.Ф. $\operatorname{Arctg} z$.

29. Теорема об аналитическом продолжении сложного элемента. Полное описание П.А.Ф. $\cos(\pi/(2+z^{1/3}))$.

30. Полное описание П.А.Ф. $\operatorname{Arcsin} z$.

31. Полное описание П.А.Ф. $(1+z^{1/3})^{1/2}$.

32. Построение модулярной функции.

33. Малая теорема Пикара для целых и для мероморфных функций (доказательство в общем случае).

34. Порядок и тип целой функции. Выражение порядка и типа через коэффициенты Тейлора в начале координат.

35. Теорема Вейерштрасса о существовании целой функции с заданными нулями.

36. Формула Йенсена.

37. Теорема о связи показателя сходимости последовательности нулей и порядка для целой функции конечного порядка.

38. Теорема Адамара о факторизации. Канонические произведения.

39. Теорема Бореля. Разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение.

40. Плотность системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$ в пространстве $C[-\pi,\pi]$ в случае последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ с условием $\liminf_{t\to\infty} n(t)/t > 2$, где $n(\cdot)$ — считающая функция последовательности Λ.

41. Одномерные комплексные многообразия и их голоморфные отображения. Неразветвленные голоморфные накрытия. Теорема о поднятии путей.

42. Понятие о римановой поверхности П.А.Ф.

Лектор: д.ф.-м.н., профессор кафедры ТФФА	К.Ю. Федоровский
Зав. кафедрой ТФФА академик РАН, профессор	Б.С. Кашин