Программа экзамена по комплексному анализу

3 курс, экономический поток

5 семестр, осень 2021 г.

1. Комплексные числа. Арифметические операции над комплексными числами. Вещественная и мнимая часть комплексного числа. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение.

2. Топология комплексной плоскости: открытые, замкнутые, ограниченные, компактные множества. Непрерывные пути. Линейно связные множества, области.

3. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Топология в $\overline{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция. Явные формулы для стереографической проекции.

4. Предел последовательности комплексных чисел. Арифметические свойства пределов последовательностей. Предел и непрерывность комплекснозначных функций комплексного переменного. Бесконечные пределы и пределы в точке ∞.

5. $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции. Формальные частные производные $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Комплексная дифференцируемость. Комплексная производная. Условия Коши–Римана. Голоморфные функции в области. Голоморфные функции в точке. Конформные функции в точке. Конформные функции в области. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

6. Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости.

7. Производная сложной функции. Производная обратной функции.

8. Экспонента и ее свойства. Логарифмы комплексного числа. Стандартные области конформности для степенной функции с натуральным показателем и для экспоненты, голоморфные ветви обратных функций к этим функциям. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента.

9. Дробно-линейные отображения. Свойства дробно-линейных отображений: конформность в $\overline{\mathbb{C}}$, групповое свойство, свойство трех точек.

10. Круговое свойство дробно-линейных отображений. Сохранение симметрии относительно обобщенной окружности при дробно-линейных отображениях.

11. Дробно-линейные отображения единичного круга на себя. Дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на себя.

12. Пути и кривые. Жордановы и замкнутые жордановы пути. Гладкие и кусочно гладкие пути и кривые.

13. Интеграл по кусочно гладкому пути в комплексной плоскости. Сведение к вещественным криволинейным интегралам второго рода. Свойства интеграла. Оценка модуля интеграла. Два примера вычисления интегралов: интеграл от функции $(z-a)^n$ при целых n по окружности с центром в точке a и интеграл от функции z^m при целых неотрицательных m по произвольной кусочно гладкой кривой.

14. Определение области с простой границей. Самая сильная формулировка интегральной теоремы Коши для области с простой границей. Идея сведения интегральной теоремы Коши к формуле Грина для C^1-гладких функций в окрестности замыкания области.

15. Лемма Гурса.

16. Лемма о приближении интеграла по гладкому пути интегралами по вписанным ломаным. Интегральная теорема Коши для неконцентрического кольца. Интегральная формула Коши для круга.

17. Равномерно сходящиеся ряды комплекснозначных функций: определение, почленное интегрирование, мажорантный признак равномерной сходимости.

18. Теорема о разложении функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.

19. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда по неотрицательным степеням.

20. Первообразная голоморфной функции в области. Единственность первообразной. Формула Ньютона-Лейбница для непрерывных функций, имеющих первообразную. Пример голоморфной функции в области, не имеющей первообразной в этой области. Существование первообразной для голоморфной функции в круге.

21. Теорема о голоморфности суммы степенного ряда в круге сходимости. Следствие о единственности разложения функции в степенной ряд.

22. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов Тейлора голоморфной функции через производные в точке разложения.

23. Интегральная теорема Коши для функции, голоморфной в окрестности замыкания области с простой границей. Интегральная формула Коши для области с простой границей. Интегральная формула Коши для производных.

24. Теорема Мореры.

25. Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности (или сумме ряда) функций, голоморфных в области, сходящейся равномерно на компактах в этой области.

26. Представление голоморфной функции в окрестности ее нуля. Теорема единственности для голоморфных функций. Пример: функция $\sin\frac{1}{z}$ в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

27. Теорема о разложении функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Теорема о сходимости степенных рядов по целым степеням. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

28. Изолированные особые точки голоморфных функций. Классификация изолированных особых точек. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе.

29. Теорема Сохоцкого.

30. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка. Связь типа изолированной особой точки с видом ряда Лорана функции в ее проколотой окрестности (для случаев конечной и бесконечной особой точки).

31. Целые функции с устранимой особой точкой в бесконечности. Целые функции с полюсом в бесконечности. Мероморфные функции в расширенной комплексной плоскости.

32. Вычеты. Вычет в терминах ряда Лорана. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечности, его выражение в терминах ряда Лорана. Теорема о полной сумме вычетов.

33. Три формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.

34. Принцип максимума модуля для голоморфных функций ("локальный" и "глобальный" варианты). Лемма Шварца. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя.

35. Лемма о голоморфной зависимости интеграла от параметра. Аналитическое продолжение Г-функции Эйлера.

Лектор, доцент Р. В. Пальвелев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор Б. С. Кашин