

Вопросы к экзамену по ТФКП

3 курс 1 поток, осенний семестр 2021/2022

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Определение и простейшие свойства функции e^z .
2. Одноточечная компактификация комплексной плоскости. Сферическая метрика на \mathbb{C}_∞ . Стереографическая проекция и ее основные свойства.
3. Связность и линейная связность множеств, компоненты связности, пути и кривые, теорема Жордана. Односвязные области. Оболочка компакта, свойство оболочки компакта, лежащего в односвязной области.
4. Действие функций e^z и z^n , $n \in \mathbb{N}$. Многозначный логарифм и его однозначные ветви в $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$, $\alpha \in (0, 2\pi)$. Многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ и ее однозначные ветви в Ω_α .
5. \mathbb{R} - и \mathbb{C} -дифференцируемость функций комплексного переменного. Дифференциальные операторы $\partial/\partial\bar{z}$ и $\partial/\partial z$. Условия Коши–Римана. Голоморфность функции в точке и в области.
6. Комплексная производная и ее основные свойства. Утверждения о производной сложной и обратной функций. Производные функций e^z , z^n , однозначных ветвей корня и логарифма.
7. Производная по направлению, ее выражение через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial\bar{z}$. Якобиан отображения, связанного с функцией комплексного переменного. Геометрический смысл комплексной производной (ее модуля и аргумента). Конформность отображений в точке и в области.
8. Дробно-линейные функции. Их конформность в \mathbb{C}_∞ . Сохранение углов между гладкими кривыми при ДЛО. Геометрические свойства ДЛО (круговое свойство, сохранение симметрии относительно обобщенных окружностей).
9. Свойство сохранения сложного отношения при ДЛО и построение ДЛО по «трем точкам». Групповое свойство ДЛО. Вычисление групп дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, плоскости \mathbb{C} и верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ .
10. Функции z^n , $n \in \mathbb{N}$ и функция Жуковского. Их основные (максимальные) области конформности и обратные ветви.
11. Многозначные функции, их непрерывные, голоморфные и конформные ветви. Функции корень степени n , $n \in \mathbb{N}$, и логарифм. Их стандартные конформные ветви и их максимальные области конформности. Степенная функция z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, и показательная функция a^z , $z \in \mathbb{C}$.
12. Тригонометрические функции комплексного переменного. Их (максимальные) области конформности и образы этих областей.
13. Степенные ряды. Круг сходимости степенного ряда (первая теорема Абеля). Формула Коши–Адамара. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Функции, локально представимые степенными рядами в областях в \mathbb{C} , и их бесконечная дифференцируемость.
14. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути/кривой и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции по спрямляемому пути/кривой. Формула для вычисления интеграла по кусочно-гладкому пути.
15. Понятие комплексной первообразной. Критерий существования комплексной первообразной в области. Формула Ньютона–Лейбница.
16. Лемма Гурса (в обычной и усиленной форме).

17. Интегральная теорема Коши для выпуклой области (для функций класса $H(D)$ и $C(D) \cap H(D \setminus \{a\})$, $a \in D$). Интегральная формула Коши в круге.
18. Локальное представление голоморфных функций степенными рядами. Ряды Тейлора. Формулы для коэффициентов Тейлора голоморфной функции. Единственность разложения голоморфной функции в ряд Тейлора.
19. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры.
20. Лемма о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля.
21. Приращение аргумента вдоль пути/кривой. Индекс кривой относительно точки, и его свойства.
22. Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши для циклов.
23. Критерий односвязности области в терминах циклов, гомологичных нулю. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Жордановы области и их ориентированные границы. Допустимые области и интегральная теорема Коши для них. Существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
24. Понятие гомотопии путей и кривых, ее простейшие свойства. Интегральная теорема Коши для гомотопных путей.
25. Интегральная формула Коши для производных, теорема Вейерштрасса о локально-равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций.
26. Нули голоморфных функций. Теорема единственности.
27. Особые точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости. Теорема Принсгейма.
28. Ряды Лорана (разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана, формулы для коэффициентов ряда Лорана, неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана).
29. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Описание устранимых особых точек. Описание полюсов, понятие порядка полюса.
30. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как особая точка.
31. Вычеты. Теорема Коши о вычетах и утверждение о полной сумме вычетов. Связь вычетов и коэффициентов ряда Лорана, формулы вычисления вычетов в полюсах, формула для вычета в бесконечности.
32. Понятие интеграла в смысле главного значения (для интегралов от функций комплексного переменного по путям/кривым). Вычет в точке относительно области. Теорема Коши о вычетах для интегралов в смысле главного значения.
33. Свойства вычета относительно области: формула вычета относительно области в полюсе первого порядка; лемма Жордана; вычеты относительно области в точке a , если $f = o(1/(z - a))$ при $a \in \mathbb{C}$ и $f = o(1/z)$ при $a = \infty$.
34. Формула Помпейю.
35. Потенциал Коши от функции класса $L^\infty(K, dx dy)$, K — компакт в \mathbb{C} , и его свойства (существование всюду в \mathbb{C} , равномерная оценка, липшицевость с показателем меньше 1, голоморфность вне K и свойство рациональной аппроксимации).
36. Теорема Рунге об аппроксимации голоморфных функций рациональными функциями. Теорема Миттаг-Лефлера.

37. Метод Рунге движения полюсов. Теорема Рунге об аппроксимации голоморфных функций многочленами.

38. Логарифмический вычет и его свойства. Вычисление интеграла $\int_{\Gamma} f'/f dz$ по спрямляемой кривой Γ от функции f , голоморфной в окрестности Γ^* и $f \neq 0$ на Γ^* .

39. Принцип аргумента и его доказательство, основанное на использовании теоремы Рунге.

40. Теорема Руше. Принцип сохранения области.

41. Лемма Шварца и ее обобщения. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя.

42. Конечные произведения Бляшке и их характеристическое свойство. Теорема Каратеодори о поточечной аппроксимации функций класса \mathcal{B} конечными произведениями Бляшке.

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
кафедры ТФФА

К.Ю. Федоровский

Зав. кафедрой ТФФА
академик РАН, профессор

Б.С. Кашин