Сборник задач по курсу "ТФКП, II семестр". 2020/21 уч. год.

Задача 1. Вычислить интегралы:

$$(1)\quad (vp)\int_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^4-16} \qquad (2)\quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^3\, dx}{x^2-1}$$

$$(3)\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+1)^2} \qquad (4)\quad (vp)\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\ln(x)\, dx}{x^2-16}$$

$$(5)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(\ln(x))^2\, dx}{x^2+4} \qquad (6)\quad (vp)\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{(x-8)(x^2+64)}$$

$$(7)\quad (vp)\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x+2)^3} \qquad (8)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)\, dx}{(x+3)^2}$$

$$(9)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)\, dx}{\sqrt[4]{x}(x+4)} \qquad (10)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{(x^3-1)}$$

$$(11)\quad (vp)\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1-x)} \qquad (12)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$(13)\quad \int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}\, dx}{x+1} \qquad (14)\quad \int_0^{1} \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}\, dx}{x^2+1}$$

Задача 2. Найти методом вычетов $B(3/4, 9/4)$, $B(7/5, 8/5)$.

Задача 3. При каком $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $\begin{array}{ll} (1) & h(x,y) = e^{\lambda x}\cos 2y \\ (2) & h(x,y) = 2x^3 + 3\lambda x y^2 \end{array}$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$. При этом λ найти целую функцию f с условием $\operatorname{Re} f = h$.

Задача 4. Привести пример функции, разрывной в начале координат, но удовлетворяющей всюду на плоскости уравнению Лапласа (без условия C^2).

Задача 5. Решить задачи Дирихле (ЗД):
$$1\quad \begin{cases} \Delta h = 0 \quad (x^2+y^2<16) \\ h(x,y) = 1-(\arg(x+iy))^2 \quad (x^2+y^2=16)\ ; \end{cases}$$
$$2\quad \begin{cases} \Delta h = 0 \quad (x^2+y^2<9) \\ h(x,y) = 3x^2-2y^3 \quad (x^2+y^2=9)\ . \end{cases}$$

Замечание. В неограниченных областях, а также для кусочно непрерывных граничны данных на решение ЗД дополнительно накладывается условие ограниченности (РЗД).

Задача 6. Решить РЗД в указанных областях D с указанными граничными условиями, используя конформные отображения.

1 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (D = \{|z| < 2, \mathrm{Im}(z) > 0\}), \\ h\big|_{|z|=2} = 3, \quad h\big|_{\mathrm{Im}(z)=0} = -3. \end{cases}$ Найти линии уровня $\{h = 0\}$ и $\{h = 1\}$.

2 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (D = \{|z - 2i| < 2, |z - i| > 1\}), \\ h\big|_{|z-2i|=2} = 5, \quad h\big|_{|z-i|=1} = -1. \end{cases}$ Найти линию уровня $\{h = 0\}$.

3 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (D = \{x^2 + y^2 < 1\}), \\ h\big|_{(\partial D \cap I)} = 1, \quad h\big|_{(\partial D \setminus I)} = 0\ , \end{cases}$ где $I = \{x > 0, y > 0\}$. Найти линии уровня $\{h = t\}$.

Задача 7. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$, где u и v – гармонические в области D. Доказать, что если $|f|$ постоянна в D, то f тоже постоянна в D.

Задача 8. Решить ЗД в круге $\{|z| < 2\}$ с граничными данными $2/(2x + 5)$.

Задача 9. Решить ЗД в полукруге $D = \{|z| < 1 | \ Im(z) > 0\}$ с граничными данными $h_0(x, y) = y^2$.

Задача 10. Решить ЗД в полукруге $\{|z| < 2\, , \mathrm{Im}(z) > 0\}$ с граничными данными y^3.

Задача 11. Доказать теорему о среднем по площади для гармонических функций.

Задача 12. Если ряд из неотрицательных гармонических в области D функций сходится хотя бы в одной точке из D, то он сходится равномерно внутри D (теорема Гарнака).

Задача 13. Пусть $a \in B_1$. Решить ЗД в круге $B_1 = \{|z| < 1\}$ с граничными данными $h_0(z) = ln|z - a|$.

Задача 14. Пусть Ω – образ круга $\{|z - 1| < 1\}$ при отображении $w = z^2$ (внутренность кардиоиды). Решить ЗД в Ω с граничными данными $h_0(w) = |w|^2$.

Задача 15. Пусть Ω – образ круга $\{|z| < 1\}$ при отображении $w = (z + 2)^2$ (Ω – улитка Паскаля). Решить ЗД в Ω с граничными данными $H_0(w) = 1/|w|$.

Задача 16. Доказать аналог теоремы об устранимой особенности для ГФ: если функция h гармонична в проколотой окрестности точки a и ограничена, то существует конечный $\lim_{z\to a} h(z)$, и, полагая $h(a) = \lim_{z\to a} h(z)$, мы получаем, что h гармонична в окрестности точки a.

Задача 17. Пусть D – произвольный круг в $\mathbb{C}$. Доказать, что всякая вещественная непрерывная функция h в D, удовлетворяющая для всякого замкнутого круга $\bar{B} \subset D$ теореме о среднем (по граничной окружности), является гармонической в D.

Задача 18. Доказать аналог теоремы Лиувилля: всякая целая ограниченная гармоническая функция постоянна.

Задача 19. Доказать, что всякую вещественную непрерывную функцию на единичной окружности ∂B_1 можно с любой точностью равномерно на ∂B_1 приблизить гармоническими полиномами.

Задача 20. Доказать единственность решения РЗД для жордановых областей в $\mathbb{C}^\sharp$.

Задача 21. Найти число корней многочлена $p(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 8$:
(a) в верхней полуплоскости;
(b) в полукруге $\{|z| < 4,\ \operatorname{Im} z > 0\}$;
(c) в левой полуплоскости.

Задача 22. Найти число нулей функции $z^2 - \cos z$ в области $\{|z| < 2\}$.

Задача 23. Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.

Задача 24. Исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения $y''' + py'' + qy' + 12y = 0$ при различных значениях параметров $p > 0$ и $q > 0$.

Задача 25. Найти число нулей многочлена $p(z) = z^5 + z^4 + 9z^3 + 2z^2 + z + 1$ в левой полуплоскости.

Задача 26. Доказать, что при $t > 1$ уравнение $ze^{t-z} = 1$ имеет в круге $\{|z| \leq 1\}$ ровно один корень, причем действительный.

Задача 27. Доказать, что при любом $a \in \mathbb{C}$ и целом $n \geq 2$ уравнение $az^n + z + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень в круге $\{|z| \leq 2\}$.

Задача 28. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z = z$ имеет только вещественные корни.

Задача 29. Доказать, что всякое голоморфное отображение замкнутого круга в себя имеет неподвижную точку.

Задача 30. Останется ли верным обратный принцип соответствия границ, если соответствующие области – жордановы в $\mathbb{C}^\sharp$, а функция – непрерывна в топологии $\mathbb{C}^\sharp$?

Задача 31. Доказать, что функция $f(z) = ze^{-z}$ однолистна в круге $B = \{|z| < 1\}$ и ни в каком большем круге с центром в нуле. Найти $f(B)$.

Задача 32. Доказать, что функция $f(z) = z/\ln z$ однолистна в области $\{|z| < 1/e\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

Задача 33. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти максимальный круг однолистности (с центром в нуле) для функции $f(z) = ze^{z^n}$.

Задача 34. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех однолистных функций из $D = \{z = x+iy \,|\, x > 0, y > 0\}$ в $B = \{z \,|\, |z| < 1\}$ с условием $f(1+i) = 0$. Найти $\sup_{\{f\in\mathfrak{F}\}} |f'(1+i)|$.

Задача 35. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ $(D \neq \mathbb{C})$ — односвязная область, $a \in D$. Если f голоморфна в D, $f(D) \subset D$, $f(a) = a$, $f'(a) = 1$, то $f(z) \equiv z$ — тождественное отображение.

Задача 36. Стереть разрезы $[-1, 2)$ и $[-i, i]$ из области $G = \{|z| < 2\}$.

Задача 37. Найти все кольца с центром в 0, конформно эквивалентные кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leq r < R < \infty$.

Задача 38. Найти группу конформных автоморфизмов кольца $\{\dfrac{1}{2} < |z| < 2\}$ и ее групповую операцию.

Задача 39. Доказать, что любой конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен.

Задача 40. Доказать единственность функции Шварца для специальных областей.

Задача 41. Проверить утверждение теоремы о специальных областях для функции $f(z) = z + (9/2)/(z^2 - 4)$. Какие полюса имеет функция Шварца области $\Omega = f(B_1)$ (в этой области)?

Задача 42. Проверить утверждение теоремы о специальных областях для функции $f(z) = z+3/(z^3-8)$. Какие полюса имеет функция Шварца области $\Omega = f(B_1)$ (в этой области)? Каков максимальный круг однолистности B_r для f?

Задача 43. Положим $D = \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (в качестве D можно взять и любое кольцо с центром в нуле, содержащее ∂B_1). Пусть $\gamma : [0,1] \to D$ – замкнутый путь, $n = \mathrm{ind}_\gamma(0) = (2\pi)^{-1}\Delta_\gamma Arg\,(z)$. Если $\gamma_n(t) = e^{2\pi int}|_{[0,1]}$ – путь, равномерно проходящий n раз ∂B_1, то $\gamma \underset{(2)}{\overset{D}{\sim}} \gamma_n$. Доказать, что разные γ_n не гомотопны в D.

Задача 44. Доказать, что пути $\gamma_{1,2} : [0,1] \to D$ – гомотопны в области D первого типа, если и только если путь $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ (перенесенный на $[0,1]$) гомотопен нулю в D. В частности, область D является (или нет) $\Gamma(1)$-односвязной и $\Gamma(2)$-односвязной одновременно.

Задача 45. Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$ и f – гомеоморфизм $\overline{B_1}$ на $\overline{D}$. Тогда $f|_{B_1}$ – гомеоморфизм B_1 и D.

Задача 46. Исследовать указанные ниже полные аналитические функции (ПАФ) по Вейерштрассу (задать начальный элемент и указать вдоль каких путей он аналитически продолжаем; для таких путей выписать семейство канонических элементов, осуществляющих продолжение; сколько элементов с центром в данной точке имеет данная ПАФ и как они друг от друга отличаются; найти изолированные особые точки *аналитических ветвей* ПАФ и дать их характеристику):

1	$\sqrt[n]{z}$	2	$\mathrm{Ln}\, z$
3	$\mathrm{Ln}(\sqrt{z}/(z^2+1))$	4	$\mathrm{Arctg}\,(i+2z^2)$
5	$\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}(z))$	6	$\mathrm{Arctg}(e^z)$
7	$\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$	8	$\cos(\pi/(2+\sqrt[3]{z}))$
9	$1/\mathrm{Ln}\, z$	10	$\sqrt{2z+\sqrt[3]{z}}$
11	$\mathrm{Arcsin}\, z$	12	$Ln(1+\sqrt{z})$.

Задача 47. Имеют ли ИПЗ целые функции $z^2 - e^z$, $z^6 + \sin^2(z) + e^{3z^2}$, $(z^2 - z)e^z$?

Задача 48. Имеют ли ИПЗ мероморфные функции $\mathrm{tg}\, z$, $z^3 + \mathrm{tg}\, z$, $z^2 \sin(z) - z^4\, \mathrm{tg}(5z)$?

Задача 49. Найти все целые функции, удовлетворяющие уравнению $e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1$.

Задача 50. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. Найти все целые функции f и g такие, что $f^n(z) + g^n(z) \equiv 1$.

Задача 51. Существует ли целая функция f с условиями $f(f(z)) = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$?