

# Программа экзамена по комплексному анализу

3 курс, экономический поток, осень 2020

1. Функции комплексного переменного. Арифметические свойства пределов функций.  $\mathbb{R}$ - и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Условия Коши–Римана.
2. Определение и свойства голоморфных функций. Теорема об обратной функции.  $e^z$ , ее свойства, обратные к ней функции.
3. Конформность функции в точке. Связь с голоморфностью. Конформное отображение открытых множеств.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
5. Дробно-линейные отображения (ДЛО). Конформность ДЛО в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Группа ДЛО.
6. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности при ДЛО. Свойство трех точек.
7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.
8. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла. Примеры непосредственного вычисления интегралов:  $(z - z_0)^m$  вдоль окружности с центром в  $z_0$ ,  $z^n$  вдоль произвольного гладкого пути.
9. Лемма Гурса.
10. Определение первообразной функции в области. Единственность первообразной в области с точностью до аддитивной константы. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника. Следствия.
11. Первообразная вдоль пути. Теорема о существовании и единственности. Формула Ньютона–Лейбница. Определение интеграла от голоморфной функции вдоль непрерывного пути. Пример функции голоморфной в области и не имеющей там (глобальной) первообразной.
12. Определение ограниченной области с простой границей. Теорема Коши для многосвязной области (схема доказательства).
13. Интегральная формула Коши.
14. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора.
15. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.
16. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
17. Голоморфность суммы степенного ряда. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения.
18. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры. Три эквивалентных определения голоморфной функции.
19. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля.
20. Определение области. Связность и линейная связность. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве.
21. Теорема единственности для голоморфных функций. Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности функций, голоморфных в области, которая сходится равномерно на компактах в этой области.
22. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням  $z - a$ . Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.
23. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого.
24. Точка  $z = \infty$  как изолированная особая точка. Главная и регулярная части ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки.

25. Целые функции с устранимой особой точкой или с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с устранимой особой точкой или с полюсом на бесконечности.
26. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
27. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.
28. Теорема о логарифмическом вычете.
29. Непрерывная ветвь аргумента вдоль пути. Изменение аргумента функции вдоль пути: определение и свойства. Принцип аргумента.
30. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН, профессор

Б.С. Кашин

Лектор, к.ф.-м.н.

М.С. Лобанов