

Программа курса "Комплексный анализ"
осень 2020/21 уч.г., отделение механики
(лектор проф. П.А. Бородин)

1. Свойства дробно-линейных отображений. Дробно-линейные автоморфизмы круга.
2. Основные элементарные функции, их максимальные области однолиственности. Обратные к ним функции. Примеры областей, в которых выделяются непрерывные ветви обратных функций.
3. \mathbb{R} -дифференцируемость и \mathbb{C} -дифференцируемость комплекснозначной функции, связь между ними. Условия Коши-Римана. Теорема Лумана-Меньшова (б/д). Множество производных чисел \mathbb{R} -дифференцируемой функции. Голоморфные в области функции. Голоморфность в бесконечности. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность в точке.
4. Определение интеграла по кривой в комплексной плоскости, независимость от параметризации кривой. Свойства интеграла. Три примера: интегралы от 1 и от z по произвольной спрямляемой кривой, интеграл от $\frac{1}{z-a}$ по окружности с центром a .
5. Интегральная теорема Коши.
6. Существование первообразной у голоморфной функции в односвязной области. Интегральная теорема Коши для составного контура. Интегральная формула Коши.
7. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Разложение голоморфной в круге функции в ряд Тейлора.
8. Свойства степенных рядов, их голоморфность в круге сходимости. Неравенства Коши для коэффициентов.
9. Теорема Мореры. Условия на функцию, эквивалентные ее голоморфности в области.
10. Теорема Лиувилля. Теорема о среднем для голоморфных функций. Теорема единственности. Принцип максимума модуля и следствия из него.
11. Пространство голоморфных в области функций, сходимости в нем. Теорема Вейерштрасса о сходимости. Метризуемость сходимости внутри области. Ненормируемость сходимости внутри области.
12. Теоремы Рунге и следствия из них.
13. Ряды Лорана, их область сходимости. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.
14. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация в терминах рядов Лорана. Теорема Римана об устранимой особой точке. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как изолированная особая точка.
15. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Способы вычисления вычетов. Вычет в бесконечности.
16. Лемма Жордана. Преобразование Фурье рациональных функций.
17. Функции, мероморфные в $\overline{\mathbb{C}}$. Достаточное условие разложимости мероморфной в \mathbb{C} функции в ряд из главных частей рядов Лорана в полюсах. Пример: $\pi / \sin \pi z$. Пример: $(\pi \operatorname{ctg} \pi z) / z$.
18. Разложение мероморфной функции в сумму целой функции и ряда из разностей главных частей рядов Лорана и многочленов. Пример: $\pi \operatorname{ctg} \pi z$. Теорема Миттаг-Леффлера.
19. Теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в произведение. Пример: $\sin \pi z$.
20. Теорема о логарифмическом вычете. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Многочлены Чебышева для круга.