

Программа курса

«Теория функций комплексного переменного»

(II поток, 5 семестр 2020/21 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. \mathbb{R} -дифференцируемость и \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Примеры их выполнения и невыполнения.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция e^z , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое.
4. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
5. Круговое свойство ДЛО. Сохранение симметрии при ДЛО. Описание всех ДЛО единичного круга на себя.
6. Свойство трех точек. Описание всех ДЛО верхней полуплоскости на себя. Конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
7. Определение и свойства $\int_{\gamma} f(z) dz$ (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
8. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от $(z - a)^n$ по окружности с центром a . Отсутствие голоморфной первообразной у функции $1/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
9. Теорема о существовании первообразной в круге. Лемма Гурса. Следствия.
10. Определение ограниченной области с кусочно-гладкой границей. Интегральная теорема Коши. Доказательство для многоугольников и областей, ограниченных дугами обобщенных окружностей.
11. Интегральная формула Коши.
12. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
13. Теорема Лиувилля. Следствия (невозможность конформного отображения плоскости на круг, основная теорема алгебры).
14. Формула Коши–Адамара. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
15. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.
16. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры. Эквивалентность трех определений голоморфной функции.
17. Представление голоморфной функции в окрестности точки, где она обращается в нуль. Понятие порядка нуля. Принцип изолированности нулей.
18. Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Теорема единственности для голоморфных функций.
19. Разложения в степенные ряды для полиномов, экспоненты, синуса, косинуса, рациональных функций, логарифма, степени с произвольным показателем.
20. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Область сходимости рядов по целым степеням $z - a$. Единственность разложения в такой ряд. Разложение функции $1/(z - 1)(z - 2)$ во всех кольцах с центром 0. Неравенства Коши.

21. Определение и классификация изолированных особых точек однозначного характера. Примеры. Критерий устранимой особой точки. Теорема Римана об устранимой особенности и ее независимое доказательство.
22. Описание полюса в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса.
23. ∞ как изолированная особая точка: определение, классификация, описание в терминах ряда Лорана.
24. Целые функции с полюсом на ∞ . Описание всех конформных отображений \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
25. Определение мероморфной функции. Мероморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$. Связь с разложением рациональной функции на простейшие дроби.
26. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.
27. Формулы для подсчета вычетов в полюсах. Вычисление $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)^{-n} dx$ и преобразования Фурье от $1/(x^2 + a^2)$ с помощью вычетов.
28. Теорема о логарифмическом вычете.
29. Непрерывная ветвь аргумента вдоль пути. Изменение аргумента функции вдоль пути: определение и свойства. Принцип аргумента.
30. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции. Следствие о связи однолистных функций с конформными отображениями.
31. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.
32. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя. Единственность конформного отображения области на круг. Задача на экстремум, решением которой является это отображение.
33. Теорема Вейерштрасса о рядах. Принцип компактности.
34. Теорема Гурвица. Следствие о пределе однолистных функций.
35. Первообразная вдоль пути: определение, существование и единственность. Определение интеграла от голоморфной функции вдоль непрерывного пути.
36. Определение гомотопных путей. Теорема Коши о гомотопии. Определение односвязной области. Примеры односвязных и не односвязных областей.
37. Теорема о существовании первообразной в односвязной области. Лемма о корнях и логарифмах.
38. Теорема Римана о конформном отображении.