

Программа экзамена по комплексному анализу

Поток механиков, 6 семестр, весна 2020 г.

1. Логарифмический вычет, теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента. Теорема Руше.
2. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолиственности голоморфной функции.
3. Теорема Гурвица о нулях. Следствие о нулях сходящейся равномерно внутри области последовательности однолистных функций.
4. Семейства голоморфных функций в области. Теорема о локальной равностепенной непрерывности локально равномерно ограниченного семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Свойства непрерывных функционалов на пространстве голоморфных функций.
5. Существование голоморфных ветвей логарифма не обращающейся в нуль голоморфной функции в односвязной области и голоморфных ветвей корней из такой функции.
6. Теорема Римана о конформном отображении. Три класса конформной эквивалентности односвязных областей в расширенной комплексной плоскости.
7. Принцип симметрии (два варианта).
8. Аналитическое продолжение (по Вейерштрассу). Элементы, канонические элементы, непосредственное продолжение, продолжение по цепочке и по пути, связь продолжений по цепочке и по пути. Теорема о продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
9. Аналитические функции в области. Понятие числа листов аналитической функции в области. Теорема Пуанкаре–Вольтерра (формулировка и идея доказательства). Действия над аналитическими функциями.
10. Изолированные особые точки аналитических функций, их классификация. Ряды Пуансо. Локальное обращение голоморфной функции в окрестности критического значения.
11. Первообразная голоморфной функции в неодносвязной области как аналитическая функция в этой области.
12. Гармонические функции двух переменных. Связь голоморфных и гармонических функций. Свойства гармонических функций.
13. Задача Дирихле для уравнения Лапласа, единственность ее решения. Формула Пуассона для решения задачи Дирихле в круге, теорема о разрешимости задачи Дирихле в круге. Формула Шварца. Разрешимость задачи Дирихле в жордановой области.
14. Модулярная функция. Малая теорема Пикара. Следствие для мероморфных функций на плоскости.
15. Векторные поля в областях на плоскости. Поток векторного поля через замкнутый гладкий контур. Циркуляция векторного поля вдоль замкнутого гладкого контура. Линии тока. Бездивергентные (локально соленоидальные) векторные поля. Функция тока. Безвихревые (локально потенциальные) векторные поля. Потенциальная функция. Комплексный потенциал векторного поля. Локальное выпрямление линий тока.

16. Простейшие векторные поля в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ с особой точкой: точечный источник (сток), точечный вихрь, точечный диполь. Их комплексные потенциалы.
17. Поле скоростей установившегося (стационарного) плоско-параллельного безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости. Формула Чаплыгина для подъемной силы в плоско-параллельном потоке.
18. Задача обтекания цилиндрического тела, сечение которого плоскостью, ортогональной оси, является внутренностью замкнутого гладкого контура. Единственность решения такой задачи при заданном векторе скорости в бесконечности и заданной циркуляции. Комплексный потенциал поля скоростей, решающего задачу бесциркуляционного обтекания. Формула Жуковского для подъемной силы, действующей на обтекаемое тело. Решение задачи обтекания кругового цилиндра.

Лектор, доцент

Р. В. Пальвелев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор

Б. С. Кашин