Программа экзамена по комплексному анализу

3 курс, экономический поток, осень 2019

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними, комплексно сопряженное число, модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа. Топология комплексной плоскости: расстояние в $\mathbb{C}$, открытые и замкнутые множества, сходимость. Связность и линейная связность. Области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Топология $\overline{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция.

2. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов функций. $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Голоморфность и конформность функции в точке и в области. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции.

3. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в $\overline{\mathbb{C}}$. Группа ДЛО. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Свойство трех точек.

4. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.

5. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла. Примеры непосредственного вычисления интегралов.

6. Лемма Гурса.

7. Определение первообразной функции в области. Единственность первообразной в области с точностью до аддитивной константы. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.

8. Первообразная вдоль пути. Теорема о существовании и единственности. Формула Ньютона-Лейбница. Определение интеграла от голоморфной функции вдоль непрерывного пути. Пример функции голоморфной в области и не имеющей там (глобальной) первообразной.

9. Определение гомотопных путей. Односвязные области. Теорема Коши о гомотопии и следствия из нее. Существование первообразной функции голоморфной в односвязной области.

10. Теорема Коши для многосвязной области (без доказательства). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

11. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.

12. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара для радиуса сходимости.

13. Голоморфность суммы степенного ряда. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд.

14. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения.

15. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры. Три эквивалентных определения голоморфной функции.

16. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля. Теорема единственности для голоморфных функций.

17. Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности функций, голоморфных в области, которая сходится равномерно на компактах в этой области.

18. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.

19. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка. Главная и регулярная части ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки.

20. Целые функции с устранимой особой точкой или с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с устранимой особой точкой или с полюсом на бесконечности.

21. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.

22. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.

23. Аналитическое продолжение. Постановка задачи. Аналитическое продолжение логарифма.

24. Лемма о голоморфной зависимости интеграла от параметра. Пример ее использования при построении аналитического продолжения.

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН, профессор Б.С. Кашин

Лектор, к.ф.-м.н. М.С. Лобанов