

Программа экзамена по комплексному анализу
3 курс, поток механиков, осень 2019 г.

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними. Комплексно сопряженное число, перестановочность сопряжения с арифметическими операциями. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формулы Муавра.
2. Топология комплексной плоскости: расстояние, открытые и замкнутые множества, сходимость. Компактные множества. Линейная связность. Области, теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые. Жордановы и замкнутые жордановы пути.
3. Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$. Топология $\bar{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция, явные формулы для нее в координатах. Компактность $\bar{\mathbb{C}}$.
4. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов функций. Свойства непрерывных функций на компакте (ограниченность, равномерная непрерывность).
5. \mathbb{R} - и \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Комплексная производная. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Голоморфность и конформность функции в точке и в области. Голоморфность и конформность в точке ∞ .
6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в $\bar{\mathbb{C}}$. Группа ДЛО. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Задание ДЛО образами трех точек.
7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.
8. Элементарные функции комплексного переменного. Функции z^n для натуральных n , e^z , $\ln z$, z^α для положительных α и их основные области конформности.
9. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла.
10. Лемма Гурса.
11. Лемма о приближении интеграла по гладкой кривой интегралами по вписанным ломаным. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Интегральная теорема Коши для области с простой границей.
12. Интегральная формула Коши.
13. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.
14. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара для радиуса сходимости.
15. Определение первообразной функции в области. Единственность первообразной в области с точностью до аддитивной константы. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.

16. Голоморфность суммы степенного ряда. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд.
17. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения. Интегральная формула Коши для производных.
18. Теорема Мореры.
19. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности ее нуля. Теорема единственности для голоморфных функций.
20. Существование первообразной для голоморфной функции в односвязной области.
21. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.
22. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка. Главная и регулярная части ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки.
23. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с устранимой особой точкой или с полюсом на бесконечности.
24. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.
25. Равномерная сходимость внутри области (равномерная сходимость на компактах). Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности функций, голоморфных в области, которая сходится равномерно на компактах в этой области. Пространство $\mathcal{O}(D)$ голоморфных функций в области. Невозможность задания равномерной сходимости внутри области нормой на пространстве $\mathcal{O}(D)$. Полунормы в пространстве $\mathcal{O}(D)$, достаточность счетной системы полунорм для задания топологии пространства $\mathcal{O}(D)$.
26. Лемма о голоморфной зависимости интеграла от параметра. Интеграл типа Коши.
27. Понятие (однозначного) аналитического продолжения. Аналитическое продолжение гамма-функции.
28. Теорема о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля для голоморфных функций («локальный» и «глобальный» варианты). Лемма Шварца.
29. Описание всех конформных автоморфизмов единичного круга, верхней полуплоскости, комплексной плоскости и расширенной комплексной плоскости.

Зав. кафедрой ТФФА,
академик РАН, профессор

Б.С.Капин

Лектор, доцент

Р. В. Пальвелев