

Программа курса

«Теория функций комплексного переменного»

(I поток, 5 семестр 2019/20 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. \mathbb{R} -дифференцируемость и \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция e^z , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое.
4. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
5. Круговое свойство ДЛО. Сохранение симметрии при ДЛО. Описание всех ДЛО единичного круга на себя.
6. Свойство трех точек. Описание всех ДЛО верхней полуплоскости на себя. Конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
7. Определение и свойства интеграла от функции вдоль кривой (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
8. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от $(z - a)^n$ по окружности с центром a . Отсутствие голоморфной первообразной у функции $1/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
9. Лемма Гурса. Существование первообразной в круге. Следствия.
10. Определение ограниченной области с простой границей. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.
11. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
12. Теорема Лиувилля. Следствия (голоморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$, невозможность конформного отображения плоскости на круг, основная теорема алгебры).
13. Формула Коши–Адамара. Единственность разложения в степенной ряд.
14. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.
15. Интегральная формула Коши для производных. Разложения функций e^z , $\sin z$, $1/z$, $\ln z$, $(1 + z)^\alpha$ в степенные ряды.
16. Теорема Мореры. Три эквивалентных определения голоморфной функции.
17. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
18. Представление голоморфной функции в окрестности точки, где она обращается в нуль. Понятие порядка нуля. Принцип изолированности нулей.
19. Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Теорема единственности для голоморфных функций.
20. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Область сходимости рядов по целым степеням $z - a$. Единственность разложения в такой ряд.
21. Определение и классификация изолированных особых точек однозначного характера. Примеры. Критерий устранимой особой точки. Несуществование \sqrt{z} как голоморфной функции в проколотой окрестности нуля.
22. Описание полюса в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса.
23. ∞ как изолированная особая точка. Описание в терминах ряда Лорана.
24. Целые функции с полюсом на ∞ . Описание всех конформных отображений \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

25. Определение мероморфной функции. Мероморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$. Связь с разложением рациональной функции на простейшие дроби.
26. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.
27. Формулы для подсчета вычетов в полюсах (особенно первого порядка). Вычисление преобразования Фурье от $1/(x^2 + a^2)$ с помощью вычетов.
28. Теорема Сохоцкого. Невозможность конформного отображения \mathbb{C} ни на какую область $D \neq \mathbb{C}$.
29. Теорема о логарифмическом вычете. Изменение аргумента функции вдоль пути: определение и свойства. Принцип аргумента.
30. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции.
31. Обратный принцип соответствия границ. Его обобщение на случай полуплоскости с конечным числом особых точек на границе.
32. Лемма о корнях и логарифмах. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник. Произвольность отношения сторон такого прямоугольника.
33. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии.
34. Эллиптический синус: мероморфность на \mathbb{C} , двоякопериодичность, дифференциальное уравнение.