

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО (ФФФХИ МГУ, 4 СЕМЕСТР 2018–2019 гг.)

1. \mathbb{R} -дифференцируемые и \mathbb{C} -дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана. Определение и свойства голоморфных функций, включая теорему об обратной функции. Определение и голоморфность функции e^z . Примеры функций, обратных к ней.
2. Конформность в точке, её связь с \mathbb{C} -дифференцируемостью. Конформное отображение одного открытого множества на другое.
3. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения: гомеоморфность, конформность, круговое свойство, сохранение симметрии. Описание всех дробно-линейных отображений единичного круга на себя.
4. Определение $\int_{\gamma} f(z) dz$. Непосредственное вычисление $\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz$ для $n \in \mathbb{Z}$ и $\int_{\gamma} z^n dz$ для $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
5. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка $|\int_{\gamma} f(z) dz|$ через $\max_{z \in \gamma} |f(z)|$ и длину γ .
6. Условие существования первообразной у непрерывной функции в круге. Лемма Гурса. Существование первообразной у голоморфной функции в круге.
7. Теорема Коши об интеграле по границе области.
8. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Простейший способ подсчета вычетов. Пример: вычисление преобразования Фурье от $(x^2 + a^2)^{-1}$.
9. Интегральная формула Коши.
10. Разложение голоморфной функции в степенной ряд.
11. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Следствие о конформном отображении всей плоскости на круг. Основная теорема алгебры.
12. Формула Коши–Адамара, единственность разложения в степенной ряд.
13. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. Разложения функций e^z , $\sin z$, $\ln z$. Интегральная формула Коши для производных.
14. Теорема Мореры. Три эквивалентных определения голоморфной функции. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
15. Структура нулей голоморфной функции. Понятие порядка нуля.
16. Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Теорема единственности для голоморфных функций.
17. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Примеры: разложения функции $1/(z^2 - 3z + 2)$ во всех кольцах с центром 0. Область сходимости рядов по целым степеням $z - a$. Единственность разложения в такой ряд.
18. Определение и классификация изолированных особых точек однозначного характера. Примеры. Описание устранимой особенности (четыре эквивалентных свойства).
19. Описание полюса в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса.
20. Описание особых точек в терминах ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.
21. Связь вычета с коэффициентами ряда Лорана. Формулы для вычетов в полюсах любого порядка. Пример: вычисление $\int_0^{\infty} (x^2 + 1)^{-n} dx$ для всех натуральных n .
22. Описание изолированной особенности при $z = \infty$ в терминах ряда Лорана. Целые функции с полюсом на ∞ . Описание всех конформных отображений \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
23. Равенство Парсеваля. Усиление неравенств Коши. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя.

24. Принцип открытости. Окончательная форма теоремы об обратной функции.
25. Комплексный потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости. Выпрямление линий тока. Источник, сток, точечный вихрь, диполь. Связь конформного отображения области на круг и течения, созданного точечным вихрем в этой области.
26. Другие физические интерпретации голоморфных функций: электростатика, теплопередача.
27. Гармонические функции: определение, связь с голоморфными, свойства (бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, теорема единственности, принцип максимума).

Заведующий
кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН

Б. С. Кашин

Лектор, доцент

А. В. Домрин