

Программа экзамена по комплексному анализу
3 курс, экономический поток, осень 2018 г.

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними. Комплексно сопряженное число, перестановочность сопряжения с арифметическими операциями. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формулы Муавра.
2. Топология комплексной плоскости: расстояние в \mathbb{C} , открытые и замкнутые множества, сходимость. Компактные множества. Линейная связность. Области, теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые.
3. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Топология $\overline{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция. Компактность $\overline{\mathbb{C}}$.
4. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов функций. Свойства непрерывных функций на компакте (ограниченность, равномерная непрерывность).
5. \mathbb{R} - и \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Голоморфность и конформность функции в точке и в области. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции. Голоморфность и конформность в точке ∞ .
6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в $\overline{\mathbb{C}}$. Группа ДЛО. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Задание ДЛО образами трех точек.
7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.
8. Элементарные функции комплексного переменного. Функции z^n для натуральных n , e^z , $\ln z$, z^α для положительных α и их основные области конформности.
9. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла.
10. Лемма Гурса.
11. Лемма о приближении интеграла по гладкой кривой интегралами по вписанным ломаным. Интегральная теорема Коши для неконцентрического кольца. Интегральная формула Коши для круга.
12. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.
13. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара для радиуса сходимости.
14. Определение первообразной функции в области. Единственность первообразной в области с точностью до аддитивной константы. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.

15. Голоморфность суммы степенного ряда. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд.
16. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения.
17. Интегральная теорема Коши для области с простой границей (формулировка и идея сведения к теореме Грина при условии C^1 -гладкости).
18. Интегральная формула Коши для области с простой границей. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры.
19. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля. Теорема единственности для голоморфных функций.
20. Равномерная сходимость внутри области (равномерная сходимость на компактах). Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности функций, голоморфных в области, которая сходится равномерно на компактах в этой области. Невозможность задания равномерной сходимости внутри области нормой на пространстве голоморфных функций в области.
21. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.
22. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка. Главная и регулярная части ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки.
23. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с устранимой особой точкой или с полюсом на бесконечности.
24. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
25. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.
26. Принцип максимума модуля для голоморфных функций («локальный» и «глобальный» варианты). Лемма Шварца. Все конформные автоморфизмы единичного круга — дробно-линейные отображения.

Зав. кафедрой ТФФА,
академик РАН, профессор

Б.С.Капин

Лектор, доцент

Р. В. Пальвелев