

Программа курса “ТФКП, часть I”.
Мехмат, группы 301-306, 2018-19 уч. год.

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней.
2. Топология в \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$. Связность и линейная связность. Компоненты связности открытых множеств в \mathbb{C} .
3. Пути и кривые в \mathbb{C} . Теорема Жордана (д-во для ломаных).
4. Односвязные области в \mathbb{C} . Оболочка компакта в односвязной области.
5. Предел последовательности и функции. Непрерывность. Определение и свойства функции e^z . Логарифм и его основная ветвь.
6. Комплексная производная и её свойства. Производная обратной функции. Производные функций e^z , $\ln(z)$ и $z^p_{(0)}$.
7. \mathbb{R} - и \mathbb{C} - дифференцируемость. Условия Коши-Римана. Свойства частных производных.
8. Конформные отображения. Геометрический смысл комплексной производной. Производная по направлению. Голоморфные функции.
9. Группа дробно-линейных отображений (ДЛО). Конформность ДЛО.
10. Геометрические свойства ДЛО: круговое свойство, сохранение симметрии; ангармоническое отношение: свойство трёх точек.
11. Дробно-линейные автоморфизмы B_1 , Π_+ , \mathbb{C} .
12. Функция z^n ($n \geq 2$) и функция Жуковского. Их основные (максимальные) области конформности.
13. Мнозначные функции, их непрерывные и голоморфные ветви. Корень степени n и логарифм. Их основные голоморфные ветви и области конформности. Общая степенная и показательная функция.
14. Тригонометрические и гиперболические функции. Образы полосы $\{|\operatorname{Re}(z)| < \pi/2\}$ под действием функций $\sin(z)$ и $\operatorname{tg}(z)$. Обратные тригонометрические функции. Функции $\arcsin(z)$ и $\operatorname{arctg}(z)$.
15. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Индекс пути относительно точки и его свойства. Индекс замкнутого жорданова пути.
16. Спряжляемые пути и кривые. Интеграл по комплексному переменному вдоль пути. Теорема существования интеграла от непрерывной функции вдоль спряжляемого пути.
17. Вычисление интеграла по комплексному переменному вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.
18. Кривые. Интеграл по комплексному переменному вдоль кривой. Корректность его определения и основные свойства.
19. Лемма Гурса (теорема Коши для треугольников).
20. Теорема Коши для односвязной области.

21. Комплексная первообразная. Теорема о существовании первообразной в односвязной области. Формула Ньютона-Лейбница.
22. Интегральная теорема Коши для допустимых областей (б/д). Доказательство для простых областей. Обсуждение примеров.
23. Интегральная формула Коши для допустимой области.
24. Формула Коши для производных. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Морера.
25. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Основная теорема алгебры.
26. Равномерная сходимость внутри области. Теорема Вейерштрасса. Полнота пространств $\mathcal{A}(D)$ и $\mathcal{A}^p(D)$.
27. Теорема Коши о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Табличные разложения в ряд Маклорена.
28. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.
29. Степенные ряды. Теорема Абеля. Формула Коши-Адамара.
30. Почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов. Единственность разложения в степенной ряд.
31. Теорема о нулях голоморфной функции. Теорема единственности.
32. Особые точки на границе круга сходимости степенного ряда.
33. Обобщенные степенные ряды. Кольцо сходимости. Единственность разложения функции в обобщенный степенной ряд.
34. Теорема Лорана. Неравенства Коши.
35. Изолированные особые точки голоморфных функций (однозначного характера). Их классификация в терминах рядов Лорана.
36. Теорема Сохоцкого.
37. Лемма Шварца. Дробно-линейность конформных изоморфизмов круговых областей.
38. Вычеты и их вычисление.
39. Теоремы Коши о вычетах и о полной сумме вычетов.
40. Некоторые типы определенных интегралов, вычисляемых с помощью вычетов. Специальные области. Функция Шварца.
41. Лемма Жордана. Преобразование Фурье рациональных функций.
42. Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.
43. Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения. Примеры вычисления (νp) -интегралов. Преобразование Гильберта.

Лектор:

д.ф.-м.н., профессор

П.В. ПАРАМОНОВ

Зав. кафедрой Теории функций
и функционального анализа
академик РАН, профессор

Б.С. КАШИН