

Программа курса (комплексный анализ, 3-й поток, 6 семестр, 2018 год)
Савчук А.М.

1. Аналитическое продолжение. Его единственность. Примеры, отсутствие аналитического продолжения. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии. Непрерывность и голоморфность интеграла с параметром от голоморфной функции. Продолжение Гамма-функции и логарифма.
2. Аналитические элементы. Непосредственное аналитическое продолжение. Продолжение по цепочке. Продолжение по пути. Единственность продолжения по пути. Эквивалентность аналитического продолжения по цепочке и вдоль пути.
3. Лемма о радиусе. Теорема об аналитическом продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии, продолжение в односвязной области.
4. Определение полной аналитической функции. Теорема о количестве канонических элементов в области. Действия над аналитическими функциями. Выделение голоморфной ветви в области и распадение на голоморфные ветви. Примеры.
5. Риманова поверхность корня и логарифма. Риманова поверхность полной аналитической функции (не строго).
6. Изолированные особые точки аналитической функции, их классификация и ее корректность. Примеры. Лемма о пути в окрестности особых точек. Ряды Пуансо. Теорема о разложении в ряды Пуансо.
7. Теорема Римана о конформной изоморфности области единичному кругу.
8. Принцип соответствия границ. Следствие из него. Теорема Каратеодори (обратный принцип соответствия границ).
9. Эллиптический интеграл первого рода.
10. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник. Интеграл Кристоффеля-Шварца.
11. Эллиптический синус Якоби.
12. Множество периодов функции (замкнутость, его структура (со стороны предельных точек)). Фундаментальная решетка. Эллиптические функции (определение, отсутствие целых среди них, ее порядок, свойства).
13. Функция Вейерштрасса и ее свойства. Теорема об описании всех эллиптических функций с данной решеткой (без док-ва).
14. Комплексные многообразия и голоморфные отображения между ними. Неразветвленное голоморфное накрытие. Лемма о поднятии пути. Два следствия из нее. Риманова поверхность (строго).
15. Гиперболический треугольник. Его симметрия относительно его стороны. Построение модулярной функции. Малая теорема Пикара. Большая теорема Пикара (без док-ва).
16. Определение гармонической функции. Теорема о гармоничности действительной и мнимой частей комплексно-значных функций и существовании комплексно-значной функции с заданной голоморфной действительной частью. Свойства гармонических функций (бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, теорема о равенстве нулю при наличии внутренней точки, где функция в 0 обращается, принцип максимума (их 2), теорема Лиувилля, теорема о гармоничности композиции в правильном порядке голоморфной и гармонических функций, формула Пуассона).
17. Задача Дирихле в произвольной области и в круге. Существование и единственность решения.

Список формулировок

1. Аналитическое продолжение до голоморфной функции (определение)
2. Теорема о голоморфности интеграла с параметром
3. Лемма о стирании отрезка
4. Принцип симметрии для биголоморфизма
5. Принцип симметрии для голоморфных отображений
6. Аналитический элемент, канонический элемент (определения)
7. Непосредственное аналитическое продолжение (определение)
8. Аналитическое продолжение по цепочке (определение)
9. Продолжение канонического элемента вдоль пути (определение)
10. Эквивалентность аналитического продолжения по цепочки и вдоль пути
11. Теорема об аналитическом продолжении вдоль гомотопных путей
12. Теорема о монодромии
13. Полная аналитическая функция (определение)
14. Выделение голоморфной ветви и распадение на голоморфные ветви (определение)
15. Определение суммы, произведения и производной полных аналитических функций
16. Композиция полных аналитических функций
17. Изолированная особая точка полной аналитической функции (определение)
18. Классификация изолированных особых точек ПАФ (определение)
19. Теорема о разложении в ряд Пуанкаре
20. Одномерное комплексное многообразие (определение)
21. Неразветвленное голоморфное накрытие (определение)
22. Теорема о поднятии путей
23. Риманова поверхность аналитической функции (определение)
24. Теорема Римана о конформном изоморфизме
25. Принцип соответствия границ
26. Теорема Каратеодори
27. Эллиптический интеграл 1-го рода (определение)
28. Интеграл Кристоффеля-Шварца (определение)
29. Теорема об отображении полуплоскости на многоугольник
30. Эллиптический синус (определение)
31. Теорема о множестве периодов мероморфной функции
32. Эллиптическая функция (определение)
33. Свойства эллиптических функций (шесть свойств)
34. Функция Вейерштрасса (определение)
35. Теорема об описании эллиптических функций с заданной решеткой периодов
36. Модулярная функция (определение)
37. Малая теорема Пикара
38. Гармонические функции (определение)
39. Свойства гармонических функций (шесть свойств)
40. Существование и единственность решения задачи Дирихле
41. Гидродинамическая интерпретация голоморфной функции (определение)
42. Преобразование Лапласа и преобразование Фурье (определение)

Список теоретических задач

1. Привести пример интеграла с параметром, который не голоморфен по параметру, хотя подынтегральная функция по параметру голоморфна.
2. Пусть $f(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, где z пробегает всю комплексную плоскость без луча $(-\infty, 0]$, а интегрирование проводится по отрезку $[1, z]$. Докажите, что $f(z) = \ln|z| + \arg z$, где логарифм – вещественное число, а $\arg z \in (-\pi, \pi)$.
3. Привести пример голоморфной в единичном круге функции, которую нельзя продолжить до голоморфной функции ни в одну точку единичной окружности.
4. Доказать, что если функция f голоморфна в каждой точке замкнутого единичного круга, то она продолжается до голоморфной функции в некоторый круг $|z| < r$, где $r > 1$.
5. Может ли функция f быть одновременно голоморфной в круге $|z| < 1$, непрерывной в круге $|z| \leq 1$, но не продолжаться до голоморфной функции ни в один круг $|z| < r$, где $r > 1$?
6. Пусть функция f непрерывна в области D и голоморфна в каждой точке $z \in D \setminus \gamma$, где γ – кусочно-гладкая кривая. Докажите, что f единственным образом продолжается до голоморфной функции в D .
7. Постройте такую голоморфную функцию f , что $f(z(\pi - z)) = \sin z$.
8. Докажите, что полная аналитическая функция $f(z) = z^\alpha (1 - z)^\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, распадается в области $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ на голоморфные ветви.
9. Пусть функция f голоморфна в области D и z_0 – ноль этой функции порядка n . Классифицируйте точку z_0 для функции $g(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ в зависимости от n .
10. Пусть функция f голоморфна в односвязной области D и не имеет нулей в D . Докажите, что найдутся ровно n голоморфных в D функций g таких, что $g^n = f$.
11. Приведите пример такой голоморфной в области D функции f , которая не имеет нулей в D , но при этом нет ни одной голоморфной функции g , для которой $e^g = f$.
12. Опишите риманову поверхность функции $\sqrt{z + \sqrt{z}}$.
13. Опишите риманову поверхность функции $\operatorname{Arctg} z$.
14. Опишите риманову поверхность функции $\operatorname{Arcsin} z$.
15. Найдите все конформные автоморфизмы проколотого круга $0 < |z| < 1$.
16. Найдите все конформные автоморфизмы кольца $1/2 < |z| < 2$.
17. Найдите все конформные автоморфизмы f прямоугольника $\{z = x + iy: |x| < 1, |y| < 1\}$ при условии, что f отображает все вершины прямоугольника в вершины.
18. Привести пример ненулевой гармонической в открытом круге $|z| < 1$ и непрерывной на множестве $\{|z| \leq 1\} \setminus \{1\}$ функции, которая равна нулю на всей единичной окружности $|z| = 1$, кроме точки 1.
19. Найти все гармонические в полуплоскости $\{Im z > 0\}$ и непрерывные в $\{Im z \geq 0\}$ функции, равные нулю на вещественной оси.