Программа экзамена по комплексному анализу
Вечернее отделение, 3 курс, осень 2017 г.

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними. Комплексно сопряженное число, перестановочность сопряжения с арифметическими операциями. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формулы Муавра.

2. Топология комплексной плоскости: расстояние в $\mathbb{C}$, открытые и замкнутые множества, сходимость. Компактные множества. Связность и линейная связность. Связность линейно связного множества. Линейная связность открытого связного множества. Области, теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые.

3. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Топология $\overline{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция.

4. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов функций. Свойства непрерывных функций на компакте (ограниченность, равномерная непрерывность).

5. $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Производная по направлению. Голоморфные функции и конформные отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции. Голоморфность и конформность в точке ∞. Голоморфность и конформность в области.

6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в $\overline{\mathbb{C}}$. Группа ДЛО. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Задание ДЛО образами трех точек.

7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.

8. Элементарные функции комплексного переменного. Функции z^n для натуральных n, e^z, $\ln z$, z^α для положительных α и их основные области конформности.

9. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла.

10. Интегральная теорема Коши для области с простой границей (формулировка и идея сведения к теореме Грина при условии C^1-гладкости).

11. Лемма Гурса.

12. Лемма о приближении интеграла по гладкой кривой интегралами по вписанным ломаным. Интегральная теорема Коши для неконцентрического кольца. Интегральная формула Коши для круга.

13. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.

14. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара для радиуса сходимости.

15. Определение первообразной функции в области. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.

16. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд. Голоморфность суммы степенного ряда.

17. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Интегральная формула Коши для области с простой границей. Интегральная формула Коши для производных. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения. Теорема Мореры.

18. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля. Изолированность нулей голоморфной функции. Теорема единственности для голоморфных функций.

19. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.

20. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка.

21. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с полюсом на бесконечности.

22. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.

23. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.

24. Первообразные голоморфных функций. Единственность первообразной в области. Первообразная голоморфной функции вдоль пути, ее существование и единственность с точностью до аддитивной константы. Формула Ньютона-Лейбница для первообразной вдоль пути.

25. Два определения гомотопности путей в области. Определение односвязной области. Теорема о равенстве интегралов функции, голоморфной в области, по путям, гомотопным друг другу в этой области. Существование первообразной в односвязной области для функции, голоморфной в этой области.

Лектор, доцент
Р. В. Пальвелев