Программа экзамена по курсу “Теория функций комплексного переменного” (II поток, 6 семестр 2016–2017 г.)

1. Теорема о логарифмическом вычете. Изменение аргумента функции вдоль пути: определение и свойства. Принцип аргумента. Теорема Руше.

2. Принцип сохранения области. Определение однолистной функции и критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции.

3. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя.

4. Принцип компактности.

5. Теорема Гурвица и ее следствие о пределах однолистных функций.

6. Теорема Римана о конформном отображении. Условия на область, необходимые и достаточные для существования конформного отображения этой области на круг. Неединственность и нормировка такого отображения.

7. Теорема Каратеодори. Доказательство для специальных областей. Нормировка конформного отображения области на круг образами трех граничных точек.

8. Комплексный потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости. Выпрямление линий тока. Примеры: комплексный потенциал z^n для $n = -1, 0, 1, 2$.

9. Точечные источники, стоки и вихри. Связь теоремы Римана с течением, заданным точечным источником.

10. Комплексные потенциалы в электростатике и теории теплопроводности. Интерпретация теоремы Римана в этих терминах.

11. Определение гармонических функций, их связь с голоморфными и свойства: бесконечная дифференцируемость, теорема единственности, принцип максимума, теорема Лиувилля, инвариантность при конформных отображениях.

12. Задача Дирихле: единственность решения, существование решения в круге, существование решения в произвольной односвязной специальной области.

13. Обобщение принципа аргумента. Обратный принцип соответствия границ. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник.

14. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии.

15. Формула Кристоффеля–Шварца.

16. Эллиптический синус, его глобальная мероморфность и двоякопериодичность.

17. Эллиптические функции: определение и свойства, включая понятие порядка и связь нулей и полюсов. Функция Вейерштрасса $\wp(z)$. Выражение любой эллиптической функции через $\wp(z)$ и ее производную.

18. Дифференциальное уравнение для $\wp(z)$. Параметризация кубической кривой посредством проколотого тора. Алгебраическая теорема сложения для $\wp(z)$.

19. Модулярная функция. Малая теорема Пикара. Пример сюръективного голоморфного локально обратимого отображения всей плоскости на себя, не являющегося накрытием. Большая теорема Пикара.

Заведующий
кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН — Б. С. Кашин

Лектор, доцент — А. В. Домрин