

Программа экзамена по комплексному анализу  
Вечернее отделение, 3 курс, осень 2016 г.

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними. Комплексно сопряженное число, перестановочность сопряжения с арифметическими операциями. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формулы Муавра.
2. Топология комплексной плоскости: расстояние в  $\mathbb{C}$ , открытые и замкнутые множества, сходимость. Компактные множества. Связность и линейная связность. Области, теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые.
3. Расширенная комплексная плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$ . Стереографическая проекция.
4. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов. Свойства непрерывных функций на компакте (ограниченность, равномерная непрерывность).
5.  $\mathbb{R}$ - и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Производная по направлению. Голоморфные функции и конформные отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции. Голоморфность и конформность в точке  $\infty$ . Голоморфность и конформность в области.
6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в  $\bar{\mathbb{C}}$ . Группа ДЛО. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Задание ДЛО образами трех точек.
7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.
8. Элементарные функции комплексного переменного. Функции  $z^n$  для натуральных  $n$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $z^\alpha$  для положительных  $\alpha$  и их основные области конформности.
9. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла.
10. Интегральная теорема Коши для области с простой границей (формулировка и идея сведения к теореме Грина при условии  $C^1$ -гладкости).
11. Первообразная функции в области. Единственность первообразной. Лемма Гурса. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.
12. Лемма о приближении интеграла по гладкой кривой интегралами по вписанным ломаным. Интегральная теорема Коши для неконцентрического кольца. Интегральная формула Коши для круга.
13. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.

14. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд. Голоморфность суммы степенного ряда.
15. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения.
16. Интегральная формула Коши для области с простой границей. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры.
17. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля. Изолированность нулей голоморфной функции. Теорема единственности для голоморфных функций.
18. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням  $z - a$ . Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.
19. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка  $z = \infty$  как изолированная особая точка.
20. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с полюсом на бесконечности.
21. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
22. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.

Лектор, доцент  
Р. В. Пальвелев