Программа экзамена по курсу теории функций комплексного переменного (II поток, 5 семестр 2016–2017 гг.)

1. $\mathbb{R}$-дифференцируемые и $\mathbb{C}$-дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана. Определение и свойства голоморфных функций, включая теорему об обратной функции. Определение и голоморфность функции e^z. Примеры функций, обратных к ней.

2. Конформность в точке, её связь с $\mathbb{C}$-дифференцируемостью. Конформное отображение одного открытого множества на другое.

3. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения: гомеоморфность, конформность, круговое свойство, сохранение симметрии. Описание всех дробно-линейных отображений единичного круга на себя.

4. Определение $\int_\gamma f(z)\,dz$. Непосредственное вычисление $\int_{|z-a|=r}(z-a)^n\,dz$ для $n\in\mathbb{Z}$ и $\int_\gamma z^n\,dz$ для $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, $\gamma\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

5. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка $|\int_\gamma f(z)\,dz|$ через $\max_{z\in\gamma}|f(z)|$ и длину γ.

6. Условие существования первообразной у непрерывной функции в круге. Лемма Гурса. Существование первообразной у голоморфной функции в круге.

7. Теорема Коши об интеграле по границе области.

8. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Простейший способ подсчета вычетов. Пример: вычисление преобразования Фурье от $(x^2+a^2)^{-1}$.

9. Интегральная формула Коши.

10. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.

11. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Следствие о конформном отображении всей плоскости на круг. Основная теорема алгебры.

12. Формула Коши–Адамара, единственность разложения в степенной ряд.

13. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. Разложения функций e^z, $\sin z$, $\ln z$, $(1+z)^\alpha$. Интегральная формула Коши для производных.

14. Теорема Мореры. Три эквивалентных определения голоморфной функции. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.

15. Структура нулей голоморфной функции. Понятие порядка нуля.

16. Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Теорема единственности для голоморфных функций.

17. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Примеры: разложения функции $1/(z^2-3z+2)$ в кольцах с центром 0. Область сходимости рядов по целым степеням $z-a$. Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.

18. Определение и классификация изолированных особых точек одозначного характера. Примеры. Описание устранимой особенности (четыре эквивалентных свойства). Отсутствие голоморфных корней и логарифмов от z в проколотой окрестности 0.

19. Описание полюса в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса.

20. Описание особых точек в терминах ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.

21. Связь вычета с коэффициентами ряда Лорана. Формулы для вычетов в полюсах любого порядка. Пример: вычисление $\int_0^\infty (x^2+1)^{-n}\,dx$ для всех натуральных n.

22. Описание изолированной особенности при $z=\infty$ в терминах ряда Лорана. Целые функции с полюсом на ∞. Описание всех конформных отображений $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$.

23. Асимптотика чисел Бернулли методом вычитания главной части ряда Лорана.

24. Определение мероморфной функции. Описание функций, мероморфных на $\overline{\mathbb{C}}$. Связь с разложением рациональных функций на простейшие дроби.

25. Теорема Миттаг-Леффлера. Разложение $1/(\sin z)^2$ и $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби. Выражение $\zeta(2k)$ через числа Бернулли.

26. Лемма о голоморфности интеграла по параметру. Определение и голоморфность функции $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$, ее аналитическое продолжение до меромофной функции на $\mathbb{C}$ и разложение на простейшие дроби.

27. Определение элемента, канонического элемента, непосредственного аналитического продолжения. Свойство Вейерштрасса и свойство треугольника.

28. Продолжение канонического элемента вдоль пути. Единственность такого продолжения. Лемма о непрерывности радиуса. Пример: вдоль каких путей допускает продолжение канонический элемент $\sqrt{z}$ с центром 1.

29. Определение гомотопии путей. Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей.

30. Определение полной аналитической функции и аналитической функции в области. Понятие числа листов. Описание аналитических функций $\sqrt{z}$ и $\ln z$. Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Описание аналитических функций с числом листов 1.

31. Определение односвязной области. Односвязность круга и неодносвязность кольца. Теорема о монодромии. Понятие ветви аналитической функции. Существование ветвей в односвязной подобласти.

32. Действия над аналитическими функциями ($\pm$, $\cdot$, $:$, композиция, сужение). Теорема о существовании голоморфных корней и логарифмов у функции без нулей в односвязной области.

33. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Эквивалентное описание через результат продолжения вдоль образующей.

34. Описание особенностей $\sqrt{\sqrt{z}+1}$ в нуле и единице. Пример аналитической функции, допускающей выделение однозначной ветви над некоторой подобластью, но не распадающейся над этой подобластью на однозначные ветви.

35. Разложение аналитической функции в ряд Пюизо. Примеры: разложение сужений $\sqrt{\sqrt{z}+1}$ на кольцах с центром в нуле и единице.

36. Определение одномерного комплексного многообразия, голоморфного неразветвленного накрытия, послойного биголоморфизма. Поднятие аналитической функции на накрытие до голоморфной функции.

37. (Не входит в программу экзамена) Определение римановой поверхности аналитической функции. Свойство минимальности (без доказательства). Четыре конструкции римановой поверхности $\sqrt{z}$.

Заведующий
кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН — Б. С. Кашин

Лектор, доцент — А. В. Домрин