Задачи по курсу "ТФКП, часть I".
Мехмат, группы 301-306, 2016-17 уч. год.

Задача 1. Найти все корни пятой степени из -1 (в радикалах) и разложить многочлен z^5+1 на элементарные множители над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

Задача 2. Доказать, что сумма всех корней степени n ($n \geq 2$ – натурально) из произвольного (ненулевого) комплексного числа равна 0, и эти корни являются вершинами некоторого правильного n-угольника с центром в нуле.

Задача 3. Пусть P – поле, содержащее $\mathbb{C}$, и размерность P над $\mathbb{C}$ конечна. Тогда $P=\mathbb{C}$.

Задача 4. Доказать эквивалентность понятий связности и линейной связности для открытых множеств в $\mathbb{C}$.

Задача 5. При каких $\alpha>0$ множество $\{|z^2-1|<\alpha\}$ является областью?

Задача 6. Доказать, что подмножество является связным в метрическом пространстве, если и только если оно связно как метрическое пространство с соответствующей индуцированной метрикой.

Задача 7. Доказать, что носитель всякого замкнутого жорданова пути в $\mathbb{C}$ гомеоморфен окружности.

Задача 8. Построить жорданов путь в $\mathbb{C}$, носитель которого имеет положительную плоскую меру Лебега.

Задача 9. Доказать теорему Жордана для замкнутых жордановых ломаных.

Задача 10. Доказать, что для всякого многоугольника (ограниченного замкнутой жордановой ломаной, не обязательно выпуклого) найдутся две вершины такие, что соединяющий их интервал (диагональ) целиком лежит внутри исходного многоугольника.

Задача 11. Привести пример двух непересекающихся ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$ с одной и той же границей.

Задача 12. Доказать, что функция $\mathrm{ind}_w\Gamma=\Delta_{\Gamma-w}\operatorname{Arg}(z)/(2\pi)$ непрерывно зависит от w вне носителя $[\Gamma]$ кривой Γ. Если Γ замкнута, то $\mathrm{ind}_w\,\Gamma$ – целочисленная локально постоянная функция вне $[\Gamma]$.

Задача 13. Найти множество предельных точек последовательности $\{e^{in}\,|\,n=1,2,\dots\}$.

Задача 14. Пусть точки $\{z_n\}_{n=1,2\dots}$ лежат в угле $\{|\arg z_n|<\alpha\}$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно. Показать, что при $\alpha\geq\frac{\pi}{2}$ это утверждение неверно.

Задача 15. Найти области определения функций $\mathrm{tg}(z)$ и $\mathrm{ctg}(z)$. Найти все точки разрыва функции $\ln(z)$.

Задача 16. Доказать, что для любого многочлена $P(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)$ все корни производной $P'(z)=\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(z-a_j)$ принадлежат выпуклой оболочке множества корней $\{a_k\}$ самого многочлена P.

Задача 17. Вывести формулы для частных производных $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\overline{z}$ функций fg, f/g, $g\circ f$ через аналогичные производные функций f и g.

Задача 18. Привести пример функции f, всюду в плоскости $\mathbb{C}$ имеющей частные производные, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, но не имеющей комплексной производной в точке $z_0=0$.

Задача 19. Как записываются условия Коши-Римана в полярных координатах?

Задача 20. Пусть f есть $\mathbb{C}$-дифференцируемая функция в области D, а F – дифференцируемая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}$. Если $\operatorname{Re} f(z)=F(\operatorname{Im} f(z))$ всюду в D, то f – константа.

Задача 21. Найти общий вид ДЛО с одной (соответственно двумя) неподвижной точкой a (соответственно a и b).

Задача 22. Пусть ДЛО $L(z)$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ только одну неподвижную точку a (соответственно две неподвижные точки a и b). Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{L\circ\cdots\circ L}_{n}(z)$ для всех $z\in\mathbb{C}$.

Задача 23. При каких $z\in\mathbb{C}$ ($z\notin i\mathbb{R}$) существует и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\mathrm{J}\circ\cdots\circ \mathrm{J}}_{n}(z)$, где $\mathrm{J}(\cdot)$ – функция Жуковского. Найти этот предел.

Задача 24. Доказать, что для фукнции $f(z)=\mathrm{tg}(z)$ полоса $D=\{|\operatorname{Re}(z)|<\pi/2\}$ является одной из максимальных областей конформности. Найти $\Omega=f(D)$. Обратное отображение $f^{-1}(w)=\mathrm{arctg}\, w:\Omega\to D$ (главное значение многозначной функции $\mathrm{Arctg}\, w$) разложить в ряд Тейлора с центром в нуле.

Задача 25. Куда переводит отображение $f(z)=\mathrm{tg}\, z$ полосу $\{|\operatorname{Re} z|<\pi/4\}$? Установить соответствие границ.

Задача 26. Найти какие-либо максимальные области конформности функций $\sqrt{1+\sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$ и $2z+\sqrt{z}_{(o)}$. Указать их образы и соответствие границ.

Задача 27. Найти какие-либо максимальные области конформности функций $\sin(z^2)$, $\cos(1/(z+2))$, $\ln(\mathrm{tg}(z))$. Указать их образы и соответствия границ.

Задача 28. Найти модуль непрерывности $\omega_{\mathbb{R}}(\sin(\cdot),\delta)$ функции $f(z)=\sin z$, $z\in\mathbb{R}$.

Задача 29. Доказать существование интеграла $\int_\gamma f(z)|dz|$ от непрерывной функции f по спрямляемому пути γ.

Задача 30. Привести пример пути γ, для которого $\int_\gamma z\,dz$ не существует.

Задача 31. Пусть Γ – направленная снизу вверх канторова лестница. Найти $\int_\Gamma \overline{z}\,dz$.

Задача 32. Доказать, что если Γ – некоторая замкнутая ориентированная ломаная в $\mathbb{C}$, а f непрерывна на ее носителе $[\Gamma]$, то существуют замкнутые жордановы ломаные $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ с носителями в $[\Gamma]$ такие, что

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)\,dz\,.$$

Задача 33. Целая функция с двумя периодами $T_1=1$ и $T_2=i$ постоянна (доказать).

Задача 34. Пусть $f_1,\dots,f_n\in \mathrm{A}(D)\cap \mathrm{C}(\overline{D})$. Доказать, что принцип максимума выполняется для функции $|f_1(z)|+\cdots+|f_n(z)|$ в D.

Задача 35. Найти суммы рядов $\sum_{n=1}^\infty n^2z^n$; $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\sin(nz)}{n!}$

Задача 36. Найти радиус сходимости ряда Маклорена функций $f(z)=\mathrm{tg}(z)$, $f(z)=1/(1+e^z)$.

Задача 37. Разложить в ряд Тейлора с центром $z_0=-3+4i$ функцию $f(z)=\ln(2iz)$ и указать область, где сумма указанного ряда совпадает с f.

Задача 38. Доказать, что функция f равномерно приближается на круге $K=\{|z|\le 1\}$ полиномами комплексного переменного тогда и только тогда, когда f непрерывна на K и голоморфна в его внутренности $\{|z|<1\}$.

Задача 39. Доказать, что функцию $f(z)=1/z$ нельзя приблизить равномерно на окружности $\{|z|=1\}$ полиномами комплексного переменного, но можно приблизить на полуокружности $\{|z|=1\}\cap\{\operatorname{Im} z\ge 0\}$.

Задача 40. Доказать, что все точки на границе кругов сходимости рядов $\sum_{n=1}^\infty z^{n!}$ и $\sum_{n=1}^\infty z^{n^2}$ соответственно являются особыми точками для их сумм.

Задача 41. Доказать полноту пространств Бергмана $A^p(D)$, $1 \le p < +\infty$.

Задача 42. Ортонормировать базис $\{z^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ в Гильбертовом пространстве $A^2(\{|z| < 1\})$ и разложить по полученному базису функцию $\sqrt{1+z}_{(o)}$.

Задача 43. Существует ли функция f, голоморфная в круге $\{|z| < 1\}$ и при всех $n = 2, 3, \dots$ удовлетворяющая одному из следующих условий: $f(\pm n^{-1}) = n^{-3}$, $f(n^{-1}) = 1/\sqrt{n}$, $f(n^{-1}) = 2^{-n}$?

Задача 44. Доказать, что если f голоморфна в круге $\{|z| < R\}$ и на его границе имеет полюс, то ряд Тейлора функции f с центром $z_0 = 0$ расходится в каждой точке окружности $\{|z| = R\}$.

Задача 45. Существует ли $f \in \mathrm{A}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ такая, что $|f(z)| \ge e^{1/|z|}$?

Задача 46. Если $f \in \mathrm{A}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ и $|f(z)| \le \sqrt{|z|} + \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$ при $z \ne 0$, то $f \equiv \mathrm{Const}$.

Задача 47. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]_t$ функции $1/(5 + 4\cos(t))$ и $\sin(t)/(13 - 12\cos(t))$.

Задача 48. При каких соотношениях на $a_1 \ne b_1 \in D = \{|z| < 1\}$ и $a_2 \ne b_2 \in D$ области $D \setminus \{a_1, b_1\}$ и $D \setminus \{a_2, b_2\}$ конформно эквивалентны?

Задача 49. Если $f \in \mathrm{A}(\mathbb{C})$, причем $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, то $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Задача 50. Пусть $U_1 = \{|z| < 1\}$, $f \in \mathrm{A}(U_1) \cap \mathrm{C}(\overline{U_1})$, причем $f = 0$ на некоторой дуге на ∂U_1. Тогда $f \equiv 0$ в $\overline{U_1}$.

Задача 51. Мероморфная функция в $\overline{\mathbb{C}}$ – рациональна. Целая функция с полюсом в ∞ – полином.

Задача 52. Найти

$$\int_{|z-i|=2,3} \mathrm{ctg}(z^2)\, dz\,; \int_{|z|=2} \frac{dz}{\sin(1/z)}\,; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{4 - 3\cos t}\,; \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^3}\, dx\,.$$

Задача 53. Найти $\mathrm{res}_{z=0}(\exp(\mathrm{ctg}(z)))$.

Задача 54. Пусть функция $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ голоморфна и взаимно однозначна в круге $D = \{|z| < 1\}$. Доказать, что $\Lambda(f(D)) \ge \pi$, причем $\Lambda(f(D)) = \pi \Leftrightarrow f(z) = z$. Здесь Λ – плоская мера Лебега.

Задача 55. Для векторного поля с комплексным потенциалом $f(z) = i/z$ (диполь) найти линии тока и время их прохождения.

Задача 56. Для векторного поля с комплексным потенциалом $f(z) = \mathrm{arctg}(z)$ (два симметричных вихря) найти линии тока и периоды их прохождения.

Лектор: д.ф.м.н., профессор Парамонов П.В.