

Комплексный анализ, вечернее отделение, 3 курс, 2015–2016 гг. Семестр 5

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними. Комплексно сопряженное число, перестановочность сопряжения с арифметическими операциями. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формулы Муавра.
2. Топология комплексной плоскости: норма и расстояние в \mathbb{C} , открытые и замкнутые множества, сходимости. Компактные множества. Связность и линейная связность, пример связного, но не линейно связного компакта, доказательство равносильности для открытых множеств. Области, теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые. Формулировка теоремы Жордана.
3. Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция, сферическая метрика, расстояние до точки ∞ . Последовательности, сходящиеся к ∞ .
4. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов. Свойства непрерывных функций.
5. \mathbb{R} - и \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Производная по направлению. Голоморфные функции и конформные отображения, связь между ними. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции. Голоморфность и конформность в точке ∞ . Голоморфность и конформность в области.
6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в $\bar{\mathbb{C}}$. Группа ДЛО, связь с группой $SL_2(\mathbb{C})$. Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Задание ДЛО образами трех точек. Сохранение двойного отношения. Четыре различных точки лежат на одной обобщенной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.
7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.
8. Элементарные функции комплексного переменного. Функции z^n для натуральных n , e^z , $\ln z$, z^α для вещественных α и их основные области конформности. Функция Жуковского. Тригонометрические функции: $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, примеры областей конформности для них.
9. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла.
10. Первообразная функции в области. Единственность первообразной. Лемма Гурса. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.
11. Первообразная вдоль пути. Существование и единственность первообразной голоморфной функции вдоль пути. Формула Ньютона–Лейбница. Определение интеграла голоморфной функции как приращения первообразной.

12. Пути, гомотопные в области. Теорема Коши об интегралах голоморфной функции по гомотопным путям. Существование первообразной голоморфной функции в односвязной области.
13. Теорема Коши для многосвязной области (формулировка и схема доказательства). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.
14. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.
15. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд. Голоморфность суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры. Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности функций, голоморфных в области, которая сходится равномерно на компактах в этой области.
16. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля. Изолированность нулей голоморфной функции. Теорема единственности для голоморфных функций.
17. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. Формулы для коэффициентов ряда Лорана голоморфной функции, неравенства Коши для этих коэффициентов.
18. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка.
19. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с полюсом на бесконечности. Описание всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости и расширенной комплексной плоскости.
20. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
21. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.
22. Понятие (однозначного) аналитического продолжения. Аналитическое продолжение гамма-функции.
23. Принцип максимума модуля для голоморфных функций. Лемма Шварца. Все конформные автоморфизмы единичного круга — дробно-линейные отображения.

Лектор, доцент
Р. В. Пальвелев