

## Программа курса "Комплексный Анализ"

(осенний семестр 2015, мат.-эконом. поток), лектор профессор А.И.Аптекарев

### Тема 1. Множества комплексной плоскости и их отображения элементарными функциями

1. Поле комплексных чисел. Топология в  $\mathbb{C}$  (открытость, замкнутость, связность). Отображения в  $\mathbb{C}$  (пути, функции комплексного переменного), касательный вектор к пути.
2. Группа дробно-линейных отображений и её свойства : транзитивности (3-х точек), круговое, симметрии и конформности.
3. Топологические отображения элементарными функциями ( $z^n$ ,  $1/z$ ,  $e^z$ ,  $\text{Ж}(z)$ ); Области однолистности. Комбинации элементарных функций ( $\cos(z)$ ,  $\text{ch}(z)$ , ...) и их обратные ( $\text{Sqrt}(z)$ ,  $z^a$ ,  $\ln(z)$ ,  $\text{Ж}^{-1}$ ...); Понятие неоднозначных функций.

### Тема 2. Комплексное дифференцирование: Определение аналитических функции

4.  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Производная по направлению. Критерий  $\mathbb{C}$ -дифференцируемости. Условия Коши-Римана.
5. Определение аналитических функций. Геометрический смысл производной аналитической функции. Конформность голоморфных отображений, критерий конформности отображений. Теорема Римана о конформном отображении (без док-ва).

### Тема 3. Интегральные теоремы комплексного анализа. Глобальные свойства анал. функций

6. Интегрирование функций комплексного переменного (интеграл по пути, по контуру). Свойства интеграла. Первообразная, ф-ла Ньютона-Лейбница.
7. Лемма Гурса. Существование первообразной у аналитической функции в звездной области. Интегральная теорема и формула Коши (в звездной области). Общая интегральная теорема и формула Коши по ориентированной границе области (без док-ва).
8. Следствия теоремы Коши (теорема о среднем, принцип максимума модуля). Обратные интегральные теоремы (аналитичность интеграла типа Коши, теорема Мореры).

### Тема 4. Степенные ряды . Локальные свойства аналитических функций

9. Последовательности и ряды аналитических функций (теоремы Вейерштрасса). Сходимость ряда Тейлора аналитической функции. Степенные ряды (теорема Абеля, формула Коши-Адамара, аналитичность степенного ряда и единственность разложения).
10. Оценки коэффициентов степенных рядов аналитических функций (Неравенство Коши), следствия (теорема Лиувилля). Нули аналитических функций. Лемма о конечности порядка нуля у нетождественной аналитической функции. Теорема единственности аналитических функций. Уточнение принципа максимума (лемма Шварца). Принцип компактности Монтеля (без док-ва).
11. Ряды Лорана (сходимость в кольце и единственность разложения). Изолированные особенности аналитических функций, ряды Лорана в особых точках. Теорема Сохоцкого.

### Тема 5. Теория вычетов и ее приложения

12. Определение вычета, теорема Коши о вычетах. Формулы для вычетов в конечных и бесконечной точках, полная сумма вычетов. Вычисление интегралов. Лемма Жордана.
13. Логарифмический вычет. Связь с нулями и полюсами мероморфной функции. Принцип аргумента. Следствия (теорема Руше, основная теорема алгебры, Теорема Гурвица о нулях последовательности аналитических функций).
14. Разложения мероморфных и целых функций. Бесконечное произведение Вейерштрасса для синуса.

Лектор, профессор

А.И.Аптекарев

Зав. кафедрой теории функций и функционального анализа  
Академик

Б.С.Кашин

Литература:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. т.1. М.1976.