**Программа экзамена по "Комплексному анализу (ТФКП). Часть 1".**

Осенний семестр 2015/2016 уч.года.

Лектор – профессор Сорокин В.Н. (второй поток)

1. **Комплексные числа.** Определение комплексных чисел (КЧ). Алгебраическая форма КЧ. Геометрическое изображение КЧ. Модуль и аргумент КЧ. Тригонометрическая форма КЧ.

2. **Комплексная плоскость.** Кривые и области на плоскости. Область — линейно связное множество. Непрерывность основных элементарных функций: многочлен, рациональная функция, экспонента, тригонометрические и гиперболические функции. Понятие о римановой поверхности логарифма. Степенная функция.

3. **Сфера Римана.** Определение стереографической проекции, формулы. Круговое свойство и свойство конформности стереографической проекции. Компактификация плоскости. Сфера Римана как гладкое многообразие. Рациональные функции – непрерывные преобразования сферы.

4. **Дробно–линейные отображения.** Определение дробно–линейных отображений (ДЛО). ДЛО — гомеоморфизм сферы. Групповое свойство ДЛО, матричная реализация. Разложение ДЛО в композицию простейших. Симметрия относительно обобщенной окружности, инверсия. Круговое свойство ДЛО. Свойство конформности ДЛО. Свойство трех точек для ДЛО, ангармоническое отношение. Свойство симметрии для ДЛО. Описание группы дробно–линейных автоморфизмов единичного круга.

5. **Дифференцирование.** Определение комплексной производной и комплексного дифференциала. Условия Коши–Римана. Геометрический смысл комплексной производной. Формальные комплексные производные. Дифференцирование основных элементарных функций (в том числе экспоненты). Определение гармонических функций на плоскости, их связь с голоморфными функциями.

6. **Конформные отображения.** Определение конформного отображения в точке и конформного отображения областей. Функция Жуковского, ее области однолистности, вычисление образа единичного круга. Экспонента, ее области однолистности, вычисление образа горизонтальной полосы. Степенная функция на примере преобразования секторов.

7. **Интегрирование.** Определение длины кривой. Спрямляемые кривые. Определение интеграла как предела интегральных сумм. Связь с криволинейными интегралами второго рода. Достаточные условия существования интеграла. Свойства интеграла: ориентированность, аддитивность, линейность, оценка. Вычисление интеграла от линейной функции, интегралы целых степеней по окружности.

8. **Интегральная теорема Коши.** Лемма Гурса и интегральная теорема Коши (ИТК) для односвязной области. Определение правильной области. Обобщенная ИТК для многосвязной правильной области (по границе) (без док-ва). Пример вычисления интегралов Френеля.

9. **Интеграл Коши.** Интегральная формула Коши. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры. Интеграл типа Коши и интеграл Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Существование первообразной у функции, голоморфной в односвязной области. Условие треугольника и теорема Мореры. Теорема об устранимой особенности.

10. **Принцип максимума.** Теорема о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля для голоморфных функций, его следствие. Лемма Шварца. Описание групп конформных автоморфизмов единичного круга, плоскости и сферы.

11. **Последовательности голоморфных функций.** Определение сходимости в пространстве голоморфных функций, ее метризуемость. Первая теорема Вейерштрасса, полнота.

12. **Степенные ряды.** Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши–Адамара. Вторая теорема Абеля. Ряд Тейлора. Разложение голоморфной в круге функции в степенной ряд. Совпадение круга сходимости с максимальным кругом голоморфности суммы степенного ряда. Примеры вычисления сумм некоторых тригонометрических рядов.

13. **Теорема единственности.** Определение нулей голоморфных функций. Определение порядка нуля. Каждый ноль имеет конечный порядок. Поведение функции в окрестности нуля. Изолированность нулей. Теорема единственности для голоморфных функций. Определение непосредственного аналитического продолжения в большую область.

14. **Особые точки степенных рядов.** Определение особой точки (ОТ). Множество особых точек замкнуто. На границе круга сходимости существуют ОТ. Примеры лакунарных рядов, у которых все точки на границе круга сходимости особые. Теорема Прингсхейма.

15. **Ряд Лорана.** Область сходимости ряда Лорана (РЛ). Свойства РЛ. Единственность разложения в РЛ. Неравенства Коши для коэффициентов РЛ. Разложение функции, голоморфной в кольце, в РЛ.

16. **Изолированные особые точки.** Определение и классификация изолированных особых точек (ИОТ). Поведение ряда Лорана в проколотой окрестности ИОТ. Теорема об устранимой особой точке. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса о существенно особой точке.

17. **Вычеты.** Определение вычетов. Формула для вычисления вычетов в полюсах. Связь вычетов с коэффициентами ряда Лорана. Основная теорема Коши о вычетах. Приложения вычетов: контурные интегралы, интегралы по периоду, несобственные интегралы, интеграл в смысле главного значения, некоторые ряды. Лемма Жордана.

18. **Интеграл Лапласа.** Определение функции–оригинала и ее изображения. Необходимые условия изображения. Достаточные условия изображения. Преобразование Бореля. Пример — функция Бесселя.

19. **Гамма–функция и дзета–функция.** Определение гамма–функции, формула приведения. Аналитическое продолжение гамма–функции. Определение бета–функции, ее связь с гамма-функцией. Формула дополнения для гамма–функции. Определение дзета–функции. Аналитическое продолжение дзета–функции.

20. **Дополнения.** Разложение котангенса в сумму главных лорановских частей. Разложение синуса в бесконечное произведение, суммы Эйлера. Пример Миттаг – Лефлера, когда есть поточечная сходимость голоморфных функций, но нет сходимости, равномерной внутри области.

21. **Принцип компактности.** Определение предкомпактного семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Теорема Стилтьеса.

22. **Приближения многочленами.** Теорема Рунге (включая лемму о движении полюсов). Обсуждение вопроса о приближении многочленами функций, непрерывных на компакте.

## Литература


1. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. "Наука". 1977.
2. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. "Наука". 1968.
3. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. "Наука". 1973.
4. М.А. Евграфов (ред.). Сборник задач по теории аналитических функций. "Наука". 1972.
5. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. "Наука". 1973.


Лектор
д.ф.-м.н., профессор (В. Н. Сорокин)

Зав. кафедрой теории функций
и функционального анализа
академик РАН (Б. С. Кашин)