

ТФКП, вечернее отделение, 3 курс, 2014–2015 гг. Семестр 5

1. Комплексные числа, арифметические операции над ними. Комплексно сопряженное число, перестановочность сопряжения с арифметическими операциями. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, формулы Муавра.
2. Топология комплексной плоскости: норма и расстояние в  $\mathbb{C}$ , открытые и замкнутые множества, сходимости. Компактные множества. Связность и линейная связность, пример связного, но не линейно связного компакта, доказательство равносильности для открытых множеств. Области, теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Пути и кривые. Гладкие и кусочно-гладкие пути и кривые. Формулировка теоремы Жордана.
3. Расширенная комплексная плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$ . Стереографическая проекция, сферическая метрика, расстояние до точки  $\infty$ . Последовательности, сходящиеся к  $\infty$ .
4. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Арифметические свойства пределов. Свойства непрерывных функций.
5.  $\mathbb{R}$ - и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Производная по направлению. Голоморфные функции и конформные отображения, связь между ними. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции. Голоморфность и конформность в точке  $\infty$ . Голоморфность и конформность в области.
6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Конформность ДЛО в  $\bar{\mathbb{C}}$ . Группа ДЛО, связь с группой  $SL_2(\mathbb{C})$ . Сохранение обобщенных окружностей и сохранение симметрии относительно обобщенной окружности. Задание ДЛО образами трех точек. Сохранение двойного отношения. Четыре различных точки лежат на одной обобщенной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.
7. Описание дробно-линейных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, комплексной плоскости, единичного круга и верхней полуплоскости.
8. Элементарные функции комплексного переменного. Функции  $z^n$  для натуральных  $n$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $z^\alpha$  для вещественных  $\alpha$  и их основные области конформности. Функция Жуковского. Тригонометрические функции:  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{tg} z$ , примеры областей конформности для них.
9. Определение интеграла вдоль кусочно-гладкого пути. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, смена знака при изменении ориентации кривой, оценка модуля интеграла.
10. Первообразная функции в области. Единственность первообразной. Лемма Гурса. Существование первообразной в круге для функции, удовлетворяющей условию треугольника.
11. Первообразная вдоль пути. Существование и единственность первообразной голоморфной функции вдоль пути. Формула Ньютона–Лейбница. Определение интеграла голоморфной функции как приращения первообразной.

12. Пути, гомотопные в области. Теорема Коши об интегралах голоморфной функции по гомотопным путям. Существование первообразной голоморфной функции в односвязной области.
13. Теорема Коши для многосвязной области (формулировка и схема доказательства). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.
14. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.
15. Круг сходимости степенного ряда, формула Коши–Адамара. Единственность разложения голоморфной в круге функции в степенной ряд. Голоморфность суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов ряда Тейлора через производные в точке разложения. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры.
16. Нули голоморфной функции, разложение голоморфной функции в окрестности нуля. Изолированность нулей голоморфной функции. Теорема единственности для голоморфных функций.
17. Принцип максимума модуля для голоморфных функций. Лемма Шварца. Все конформные автоморфизмы единичного круга — дробно-линейные отображения.
18. Ряды Лорана. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Сходимость рядов по целым степеням  $z - a$ . Формулы для коэффициентов ряда Лорана голоморфной функции, неравенства Коши для этих коэффициентов.
19. Изолированные особые точки. Классификация. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе. Теорема Сохоцкого. Точка  $z = \infty$  как изолированная особая точка.
20. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с полюсом на бесконечности. Описание всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости и расширенной комплексной плоскости.
21. Вычеты. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычет в терминах ряда Лорана. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
22. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана.

Лектор, доцент  
Р. В. Пальвелев