

**Программа курса "Комплексный анализ"**  
**осень 2014/15 уч.г., отделение математики, II поток**  
(лектор доц. П.А. Бородин)

1. Свойства дробно-линейных отображений. Дробно-линейные автоморфизмы круга.
2. Основные элементарные функции, их максимальные области однолиственности. Обратные к ним функции. Примеры областей, в которых выделяются непрерывные ветви обратных функций.
3.  $\mathbb{R}$ -дифференцируемость и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость комплекснозначной функции, связь между ними. Условия Коши-Римана. Голоморфные в области функции. Голоморфность в бесконечности. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность в точке.
4. Определение интеграла по кривой в комплексной плоскости, независимость от параметризации кривой. Свойства интеграла. Три примера: интегралы от 1 и от  $z$  по произвольной спрямляемой кривой, интеграл от  $\frac{1}{z-a}$  по окружности с центром  $a$ .
5. Интегральная теорема Коши.
6. Существование первообразной у голоморфной функции в односвязной области. Интегральная теорема Коши для составного контура. Интегральная формула Коши.
7. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Разложение голоморфной в круге функции в ряд Тейлора.
8. Свойства степенных рядов, их голоморфность в круге сходимости. Неравенства Коши для коэффициентов.
9. Теорема Мореры. Условия на функцию, эквивалентные ее голоморфности в области.
10. Теорема Лиувилля. Теорема о среднем для голоморфных функций. Теорема единственности. Принцип максимума модуля и следствия из него.
11. Пространство голоморфных в области функций, сходимости в нем. Теорема Вейерштрасса о сходимости. Метризуемость сходимости внутри области. Невозможность нормировать эту сходимости.
12. Теоремы Рунге и следствия из них.
13. Ряды Лорана, их область сходимости. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.
14. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация в терминах рядов Лорана. Теорема Римана об устранимой особой точке. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как изолированная особая точка.
15. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Способы вычисления вычетов. Вычет в бесконечности.
16. Лемма Жордана. Преобразование Фурье рациональных функций.
17. Теорема о логарифмическом вычете. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Многочлены Чебышева для круга. Теорема Гурвица.
18. Функции, мероморфные в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Достаточное условие разложимости мероморфной в  $\mathbb{C}$  функции в ряд из главных частей рядов Лорана в полюсах. Примеры:  $\pi/\sin \pi z$ ,  $(\pi \operatorname{ctg} \pi z)/z$ .
19. Суммирование рядов с помощью вычетов. Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ .
20. Разложение мероморфной функции в сумму целой функции и ряда из разностей главных частей рядов Лорана и многочленов. Пример:  $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ . Теорема Миттаг-Леффлера.
21. Теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в произведение. Пример:  $\sin \pi z$ .