

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ  
(I ПОТОК, 5 СЕМЕСТР 2014–2015 г.)

1. Пределы и непрерывность функций комплексного переменного.  $\mathbb{R}$ -дифференцируемые и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана.
2. Определение и простейшие свойства голоморфных функций, включая теорему об обратной функции. Определение и голоморфность функции  $e^z$ .
3. Конформность в точке: определение и связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое.
4. Расширенная комплексная плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$ . Дробно-линейные отображения как конформные отображения  $\bar{\mathbb{C}}$  на себя.
5. Дробно-линейные отображения: круговое свойство, сохранение симметрии.
6. Описание всех дробно-линейных отображений единичного круга на себя.
7. Определение  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . Непосредственное вычисление  $\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz$  для  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\int_{\gamma} z^n dz$  для  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ,  $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Формула Ньютона–Лейбница.
8. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования.
9. Лемма Гурса об интеграле по границе треугольника.
10. Существование первообразной в круге.
11. Определение области с простой границей. Теорема Коши об интеграле по границе области.
12. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Простейший способ подсчета вычетов. Вычисление преобразования Фурье от  $(1+x^2)^{-1}$ . Интегральная формула Коши.
13. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
14. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Невозможность конформного отображения плоскости на круг. Основная теорема алгебры.
15. Сходимость степенных рядов: формула Коши–Адамара. Единственность разложения в степенной ряд.
16. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула  $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ . Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры.
17. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
18. Представление голоморфной функции в окрестности точки, где она обращается в нуль. Понятие порядка нуля.
19. Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Теорема единственности для голоморфных функций.
20. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Область сходимости рядов по целым степеням  $z - a$ . Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.
21. Определение и классификация изолированных особых точек однозначного характера. Примеры. Описание устранимой особенности. Невозможность определить  $\sqrt{z}$  как голоморфную функцию в проколотой окрестности начала координат.
22. Описание полюса в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса. Связь вычета с рядом Лорана. Формулы для вычетов в полюсах любого порядка. Вычисление интеграла по всей оси от  $(1+x^2)^{-n}$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Теорема Сохоцкого.
23. Бесконечность как изолированная особая точка. Целые функции с полюсом на  $\infty$ . Описание всех конформных отображений  $\mathbb{C}$  и  $\bar{\mathbb{C}}$  на себя.

24. Определение мероморфной функции. Описание функций, мероморфных на  $\overline{\mathbb{C}}$ . Разложение рациональной функции на простейшие дроби.

25. Вычисление сумм рядов с помощью вычетов. Разложение  $\operatorname{ctg} z$  на простейшие дроби. Теорема Миттаг–Леффлера.

26. Сходимость бесконечных произведений. Теорема Вейерштрасса о целых функциях. Разложение целой функции в произведение по нулям. Разложение синуса в бесконечное произведение. Интерполяционная теорема.

27. Теорема Вейерштрасса о голоморфных функциях с предписанными нулями в произвольной области. Представление мероморфных функций в виде отношения голоморфных. Функции, не допускающие аналитического продолжения ни в какую большую область.

28. Голоморфная зависимость интегралов от параметра. Определение и аналитическое продолжение гамма-функции. Разложение гамма-функции на простейшие дроби. Формула отражения для гамма-функции.

29. Определение и аналитическое продолжение дзета-функции Римана.

30. Понятия элемента, канонического элемента, аналитического продолжения (непосредственного и вдоль пути). Свойства этих видов аналитического продолжения. Эквивалентность продолжения по цепочке и вдоль пути. Понятие полной аналитической функции.

31. Определение аналитической функции в области. Примеры (однозначные функции, корень и логарифм).

32. Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей. Определение односвязной области. Односвязность круга и неодносвязность кольца.

33. Понятие числа листов аналитической функции в области. Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Описание аналитических функций с числом листов 1.

34. Теорема о монодромии. Следствия о существовании первообразных, корней и логарифмов от голоморфных функций.

35. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Эквивалентное описание с помощью образующей фундаментальной группы проколотого круга.

36. Действия над аналитическими функциями (сумма, композиция, сужение). Описание особенностей функции  $\sqrt{\sqrt{z} + 1}$ . Сравнение понятий полной аналитической функции и аналитической функции в области.

37. Ряды Пуанкаре. Одномерные комплексные многообразия. Неразветвленные голоморфные накрытия. Поднятие аналитической функции на накрытие до однозначной голоморфной функции.

38. Понятие римановой поверхности аналитической функции в области. Свойство минимальности. Четыре представления римановой поверхности  $\sqrt{z}$ .

Заведующий  
кафедрой теории функций  
и функционального анализа,  
академик РАН

Б. С. Кашин

Лектор, доцент

А. В. Домрин