

Программа курса "Комплексный Анализ"

(осенний семестр 2013, мат.-эконом. поток), лектор профессор А.И.Аптекарев

Тема 1. Множества комплексной плоскости и их отображения элементарными функциями

1. Поле комплексных чисел. Топология в \mathbb{C} (открытость, замкнутость, связность). Отображения в \mathbb{C} (пути, функции комплексного переменного), касательный вектор к пути.
2. Группа дробно-линейных отображений и её свойства : транзитивности (3-х точек), круговое, симметрии и конформности.
3. Топологические отображения элементарными функциями (z^n , $1/z$, e^z , $\text{Ж}(z)$); Области однолистности. Комбинации элементарных функций ($\cos(z)$, $\text{ch}(z)$, ...) и их обратные ($\text{Sqrt}(z)$, z^a , $\ln(z)$, Ж^{-1} ...); Понятие неоднозначных функций.

Тема 2. Комплексное дифференцирование: Определение аналитических функций

4. \mathbb{R} и \mathbb{C} -дифференцируемость. Производная по направлению. Критерий \mathbb{C} -дифференцируемости. Условия Коши-Римана.
5. Определение аналитических функций. Геометрический смысл производной аналитической функции. Конформность голоморфных отображений, критерий конформности отображений. Теорема Римана о конформном отображении (без док-ва).

Тема 3. Интегральные теоремы комплексного анализа. Глобальные свойства анал. функций

6. Интегрирование функций комплексного переменного (интеграл по пути, по контуру). Свойства интеграла. Первообразная, ф-ла Ньютона-Лейбница.
7. Лемма Гурса. Существование первообразной у аналитической функции в звездной области. Интегральная теорема и формула Коши (в звездной области). Общая интегральная теорема и формула Коши по ориентированной границе области (без док-ва).
8. Следствия теоремы Коши (теорема о среднем, принцип максимума модуля). Обратные интегральные теоремы (аналитичность интеграла типа Коши, теорема Мореры).

Тема 4. Степенные ряды . Локальные свойства аналитических функций

9. Последовательности и ряды аналитических функций (теоремы Вейерштрасса). Сходимость ряда Тейлора аналитической функции. Степенные ряды (теорема Абеля, формула Коши-Адамара, аналитичность степенного ряда и единственность разложения).
10. Оценки коэффициентов степенных рядов аналитических функций (Неравенство Коши), следствия (теорема Лиувилля). Нули аналитических функций. Лемма о конечности порядка нуля у нетождественной аналитической функции. Теорема единственности аналитических функций. Уточнение принципа максимума (лемма Шварца). Принцип компактности.
11. Ряды Лорана (сходимость в кольце и единственность разложения). Изолированные особенности аналитических функций, ряды Лорана в особых точках. Теорема Сохоцкого.

Тема 5. Теория вычетов и ее приложения

12. Определение вычета, теорема Коши о вычетах. Формулы для вычетов в конечных и бесконечной точках , полная сумма вычетов. Вычисление интегралов. Лемма Жордана.
13. Логарифмический вычет. Связь с нулями и полюсами мероморфной функции. Принцип аргумента. Следствия (теорема Руше, основная теорема алгебры, Теорема Гурвица о нулях последовательности аналитических функций).
14. Разложения мероморфных и целых функций. Бесконечное произведение для синуса.

Лектор, профессор

А.И.Аптекарев

Зав. кафедрой теории функций и функционального анализа
Академик

Б.С.Кашин