

Программа курса (комплексный анализ 5 семестр)

1. Комплексные числа. Полярное представление. Стереографическая проекция, сферическая метрика Число e .
2. Пути и кривые. Области (открытость, связность, линейная связность).
3. Дробно—линейные функции. Свойства дробно—линейных отображений (групповое, круговое, симметрия, трех точек).
4. Дробно—линейные автоморфизмы областей (расширенная плоскость, плоскость, круг, полуплоскость).
5. Элементарные функции комплексного переменного (целые степени, функция Жуковского). Области однолиственности. Обратные функции (корни и обратная функция Жуковского). Понятие многозначной функции.
6. Элементарные функции комплексного переменного (экспонента, тригонометрические функции). Области однолиственности. Обратные функции (логарифм и обратные тригонометрические функции). Понятие многозначной функции.
7. Дифференцируемость функций комплексного переменного (R -дифференцируемость, C -дифференцируемость, условия Коши—Римана).
8. Производная по направлению. Геометрический смысл производной. Конформные отображения. Конформность элементарных функций.
9. Интеграл по кривой. Свойства интеграла вдоль пути. Вычисление интеграла от целых степеней.
10. Лемма Гурса. Существование первообразной в круге.
11. Первообразная вдоль пути. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Теорема Коши о гомотопных путях. Существование первообразной в односвязной области.
13. Теорема Коши для многосвязной области (без строгого доказательства, но с идеей доказательства). Интегральная формула Коши.
14. Разложение в ряд Тейлора. Множество точек сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара, теорема Абеля. Примеры.
15. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Вейерштрасса. Голоморфность суммы степенного ряда.
16. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Коэффициенты ряда Тейлора. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.
17. Теорема Морера. Три эквивалентных определения голоморфной функции.
18. Свойства голоморфных функций (теорема единственности, нули). Задача об аппроксимации голоморфных функций полиномами и рациональными дробями (формулировки).
19. Разложение в ряд Лорана. Множество точек сходимости степенного ряда по целым степеням. Голоморфность суммы степенного ряда.
20. Изолированные особые точки однозначного характера. Описание устранимых особых точек.
21. Описание полюсов. Теорема Сохоцкого.
22. Целые и мероморфные функции с полюсом на бесконечности. Теорема Миттаг-Леффлера.
23. Вычеты (определение и формулы подсчета). Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.
24. Лемма Жордана. Интегрирование рациональных дробей. Преобразование Фурье рациональных дробей. Интегралы в смысле главного значения Коши (использование полувычетов).
25. Принцип аргумента (обе версии). Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
26. Принцип сохранения области. Теорема об обратной функции.
27. Критерий локальной однолиственности. Теорема Гурвица и следствие из нее.
28. Принцип максимума модуля (обе версии). Лемма Шварца. Автоморфизмы основных областей (расширенная плоскость, плоскость, круг).
29. Пространство голоморфных функций. Линейные непрерывные функционалы. Принцип компактности Монтеля.
30. Теорема Римана о конформном отображении.