

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ “КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ”
(II ПОТОК, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2012–2013 г.)

1. Понятия элемента, канонического элемента, аналитического продолжения (непосредственного и вдоль пути). Свойства непосредственного аналитического продолжения. Единственность продолжения вдоль пути.
2. Определение аналитической функции в области. Примеры (однозначные функции, корень и логарифм). Понятие числа листов. Описание аналитических функций с числом листов 1.
3. Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей. Теорема о монодромии. Понятие ветви. Аналитические функции как множества элементов, ветвей, ростков.
4. Действия над аналитическими функциями (сумма, композиция, сужение). Новое доказательство леммы о голоморфных корнях и логарифмах.
5. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Ее представление с помощью фундаментальной группы проколотого круга. Описание особенностей функции $\sqrt{\sqrt{z} + 1}$.
6. Понятие полной аналитической функции. Сравнение с понятием аналитической функции в области.
7. Ряды Пуанкаре. Понятие алгебраической особой точки. Определение алгебраических функций. Их связь с аналитическими функциями, заданными полиномами от двух переменных.
8. Обратный принцип соответствия границ. Его варианты и уточнения. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник.
9. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии. Замечания о полюсах и о продолжении голоморфных функций через границу.
10. Формула Кристоффеля–Шварца. Эллиптический синус.
11. Множество периодов мероморфной функции. Определение и свойства эллиптических функций, включая понятие порядка и связь нулей и полюсов.
12. Функция Вейерштрасса $\wp(z)$. Ее свойства. Выражение любой эллиптической функции через $\wp(z)$. Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса.
13. Алгебраическая теорема сложения для $\wp(z)$. Теорема Вейерштрасса о функциях с алгебраической теоремой сложения.
14. Теорема Каратеодори о соответствии границ при конформном отображении.
15. Полная аналитическая функция, обратная к гиперэллиптическому интегралу и не являющаяся аналитической функцией ни в какой области.