

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ  
(II ПОТОК, 5 СЕМЕСТР 2012–2013 г.)

1. Пределы и непрерывность функций комплексного переменного.  $\mathbb{R}$ -дифференцируемые и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана.
2. Определение и простейшие свойства голоморфных функций, включая теорему об обратной функции. Определение и голоморфность функции  $e^z$ .
3. Конформность в точке: определение и связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое.
4. Расширенная комплексная плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ . Дробно-линейные отображения как конформные отображения  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.
5. Дробно-линейные отображения: круговое свойство, сохранение симметрии.
6. Описание всех дробно-линейных отображений единичного круга на себя.
7. Определение  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . Непосредственное вычисление  $\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz$  для  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\int_{\gamma} z^n dz$  для  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ,  $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Формула Ньютона–Лейбница.
8. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования.
9. Лемма Гурса об интеграле по границе треугольника.
10. Существование первообразной в круге.
11. Определение области с простой границей. Теорема Коши об интеграле по границе области.
12. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Простейший способ подсчета вычетов. Вычисление преобразования Фурье от  $(1+x^2)^{-1}$ .
13. Интегральная формула Коши.
14. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
15. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Невозможность конформного отображения плоскости на круг. Основная теорема алгебры.
16. Сходимость степенных рядов: формула Коши–Адамара. Единственность разложения в степенной ряд.
17. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула  $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ . Интегральная формула Коши для производных. Теорема Мореры. Три эквивалентных определения голоморфной функции.
18. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
19. Представление голоморфной функции в окрестности точки, где она обращается в нуль. Понятие порядка нуля.
20. Определение области. Теорема об открыто-замкнутом подмножестве. Теорема единственности для голоморфных функций.
21. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Область сходимости рядов по целым степеням  $z - a$ . Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.
22. Определение и классификация изолированных особых точек однозначного характера. Примеры. Описание устранимой особенности (четыре эквивалентных свойства). Невозможность определить  $\sqrt{z}$  как голоморфную функцию в проколотой окрестности начала координат.

23. Описание полюса в терминах ряда Лорана. Понятие порядка полюса. Связь вычета с рядом Лорана. Формулы для вычетов в полюсах любого порядка. Вычисление интеграла по всей оси от  $(1 + x^2)^{-n}$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Теорема Сохоцкого.

24. Бесконечность как изолированная особая точка. Целые функции с полюсом на  $\infty$ . Описание всех конформных отображений  $\mathbb{C}$  и  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.

25. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя. Нормировка конформного отображения области на круг.

26. Определение мероморфной функции. Теорема о логарифмическом вычете. Определение и свойства чисел  $\Delta \arg_{\gamma} f$  и  $\Delta \arg_{\partial D} f$ .

27. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области.

28. Критерий локальной однолиственности. Окончательная форма теоремы об обратной функции. Теорема Гурвица.

29. Принцип компактности.

30. Первообразная вдоль пути. Определение интеграла от  $f$  по  $\gamma$  для голоморфных  $f$  и непрерывных  $\gamma$ . Определение гомотопных путей. Теорема Коши о гомотопии.

31. Определение односвязной области. Односвязность круга и неодносвязность кольца. Существование первообразной в любой односвязной области. Лемма о голоморфных корнях и логарифмах.

32. Теорема Римана о конформном отображении. Варианты ее формулировки.

33. Принцип максимума модуля. Описание всех функций, голоморфных в замкнутом круге и переводящих границу круга в себя.

34. Лемма Шварца. Естественность экстремальной задачи, используемой в доказательстве теоремы Римана.

35. Критерий разрешимости задачи интерполяции в классе ограниченных голоморфных функций. Существование решений, являющихся произведениями Бляшке.

36. Определение и свойства нормальной сходимости. Определение нормального семейства. Теорема Марти.

37. Лемма о перенормировке. Теорема Монтеля.

38. Большая и малая теоремы Пикара.

Заведующий  
кафедрой теории функций  
и функционального анализа,  
академик РАН

Б. С. Кашин

Лектор, доцент

А. В. Домрин