Задачи по курсу "Комплексный анализ, часть II"
мехмат, группы 307-312, 2010/11 уч. год.

Раздел 1. Применение теоремы Коши о вычетах.

Задача 1. Вычислить интегралы:

1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}\,dx}{x^2+1}$

3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+9)^2}$ 4 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$

5 (v.p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos x - \cos 2x)\,dx}{x^2(x^2-4)}$ 6 (v.p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+2)(x-3)}$

7 (v.p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1-x)}$ 8 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x(1-x)}\,dx}{x^2+1}$

9 (v.p) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-\cos t-\sin t}$ 10 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

11 (v.p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\,dx}{1-e^{2x}}\,, 0<\alpha<2\,;$ 12 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}\,dx}{x+1}$

13 $H\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ 14 $H\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)$,

где $H(\cdot)$ - преобразование Гильберта.

Раздел 2. Принцип аргумента и теорема Руше. Принцип симметрии. Теоремы Римана и Каратеодори о конформном отображении.

Задача 1. Найти число корней многочлена $p(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 8$:
(a) в левой полуплоскости;
(b) в верхней полуплоскости;
(c) в полукруге $\{|z| < 4,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Задача 2. Найти число нулей функции $z^2 - \cos z$ в области $\{|z| < 2\}$.

Задача 3. Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.

Задача 4. Исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения $y''' + py'' + qy' + 12y = 0$ при различных значениях параметров $p > 0$ и $q > 0$.

Задача 5. Доказать, что при $t > 1$ уравнение $ze^{t-z} = 1$ имеет в круге $\{|z| \le 1\}$ ровно один корень, причем действительный.

Задача 6. Доказать, что при любом $a \in \mathbb{C}$ и целом $n \ge 2$ уравнение $az^n + z + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень в круге $\{|z| \le 2\}$.

Задача 7. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z = z$ имеет только вещественные корни.

Задача 8. Доказать, что всякое голоморфное отображение замкнутого круга в себя имеет неподвижную точку.

Задача 9. Останется ли верным обратный принцип соответствия границ, если соответствующие области – жордановы в $\overline{\mathbb{C}}$, а функция – непрерывна в топологии $\overline{\mathbb{C}}$?

Задача 10. Доказать, что функция $f(z) = ze^{-z}$ однолистна в круге $B = \{|z| < 1\}$ и ни в каком большем круге с центром в нуле. Найти $f(B)$.

Задача 11. Доказать, что функция $f(z) = -z/\ln z$ однолистна в полукруге $\{|z| < 1/e\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

Задача 12. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти максимальный круг однолистности (с центром в нуле) для функции $f(z) = ze^{z^n}$.

Задача 13. Найти все кольца с центром в 0, конформно эквивалентные кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leq r < R < \infty$.

Задача 14. Найти группу конформных автоморфизмов кольца $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$ и ее групповую операцию.

Задача 15. Доказать, что любой конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен.

Задача 16. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех однолистных функций из $D = \{z = x + iy \,|\, x > 0, y > 0\}$ в $B = \{z \,|\, |z| < 1\}$. Найти $\sup_{\{f\in\mathfrak{F}\}} |f'(1+i)|$.

Задача 17. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ $(D \neq \mathbb{C})$ — односвязная область, $a \in D$. Если f голоморфна в D, $f(D) \subset D$, $f(a) = a$, $f'(a) = 1$, то f — тождественное отображение.

Задача 18. Установить теоремы единственности для конформных отображений жордановых областей в $\overline{\mathbb{C}}$.

Раздел 3. Многозначные аналитические функции. Теоремы Пикара.

Задача 1. Исследовать указанные ниже полные аналитические функции (ПАФ) по Вейерштрассу (задать начальный элемент и указать вдоль каких путей он аналитически продолжаем; для таких путей выписать семейство канонических элементов, осуществляющих продолжение; сколько элементов с центром в данной точке имеет данная ПАФ и как они друг от друга отличаются; найти изолированные особые точки ПАФ и дать их характеристику):

1	$\sqrt[n]{z}$	2	$\operatorname{Ln} z$
3	$\cos(\pi/(2+\sqrt{z}))$	4	$1/\operatorname{Ln} z$
5	$\sqrt{1-z^2}$	6	$\operatorname{Arctg}(e^z)$
7	$\operatorname{Arctg} z$	8	$\operatorname{Arcsin} z$
9	$\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$	10	$\sqrt{1+\sqrt{z}}$
11	$\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}(z))$	12	$\cos\sqrt{z}$.

Задача 2. Доказать, что риманова поверхность ПАФ $\sqrt[n]{z}$ (дополненная точками 0 и ∞) гомеоморфна двумерной сфере S^2.

Задача 3. Найти все целые функции, удовлетворяющие уравнению $e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1$.

Задача 4. Доказать, что целая функция $f(z) = ze^z$ не имеет исключительных пикаровских значений.

Задача 5. Сколько исключительных пикаровских значений имеют функции $\operatorname{tg} z$, $z + \operatorname{tg} z$, $z^2 - e^z$?

Задача 6. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. Найти все целые функции f и g такие, что $f^n(z) + g^n(z) \equiv 1$.

Раздел 4. Гармонические функции.

Задача 1. При каком $\lambda \in \mathbb{R}$ функция 1 $h(x,y) = e^{\lambda x}\cos 2y$; 2 $h(x,y) = 2x^3 + 3\lambda xy^2$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$. При этом λ найти целую функцию f с условием $\operatorname{Re} f = h$.

Задача 2. Привести пример функции, разрывной в начале координат, но удовлетворяющей всюду на плоскости уравнению Лапласа.

Задача 3. Решить задачи Дирихле (ЗД): 1 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (x^2+y^2<16) \\ h(x,y) = 1-(\arg(x+iy))^2 \quad (x^2+y^2=16) \end{cases}$; 2 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (x^2+y^2<9) \\ h(x,y) = 3x^2-2y^3 \quad (x^2+y^2=9) \end{cases}$.

Задача 4. Решить ЗД в Π_+: 1 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (\text{в } \Pi_+) \\ h(t,0) = \dfrac{1}{t^2+4} \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$ 2 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (\text{в } \Pi_+) \\ h(t,0) = \cos t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$

(пользуясь интегралом Пуассона и методом вычетов).

Замечание. В неограниченных областях, а также для кусочно непрерывных граничны данных на решение ЗД дополнительно накладывается условие ограниченности. Так, в пункте 2 предыдущей задачи неограниченная гармоническая функция $h(z) = \mathrm{Re}(\cos z)$ также удовлетворяет условию $h(t,0) = \cos t$.

Задача 5. Решить ЗД в указанных областях D с указанными граничными условиями, используя конформные отображения.

1 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (D = \{|z|<2, \mathrm{Im}(z)>0\}), \\ h\big|_{|z|=2} = 3, \quad h\big|_{\mathrm{Im}(z)=0} = -3. \end{cases}$ Найти линии уровня $\{h=0\}$ и $\{h=1\}$.

2 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (D = \{|z-2i|<2, |z-i|>1\}), \\ h\big|_{|z-2i|=2} = 5, \quad h\big|_{|z-i|=1} = -1. \end{cases}$ Найти линию уровня $\{h=0\}$.

3 $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad (D = \{x^2+y^2<1\}), \\ h\big|_{(\partial D\cap I)} = 1, \quad h\big|_{(\partial D\setminus I)} = 0, \end{cases}$ где $I = \{x>0, y>0\}$. Найти линии уровня $\{h=t\}$.

Задача 6. Пусть $f(z) = u(z)+iv(z)$, где u и v – гармонические в области D. Если $|f|$ постоянна в D, то f тоже постоянна в D.

Задача 7. Найти функцию Грина для уравнения Лапласа в круге $\{|z|<1\}$.

Задача 8. Решить ЗД в круге $\{|z|<2\}$ с граничными данными $1/((x-1)^2+y^2)$.

Задача 9. Решить ЗД в круге $\{|z|<2\}$ с граничными данными $1/(x+y+3)$.

Задача 10. Решить ЗД в полукруге $\{|z|<2\,,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ с граничными данными y^3.

Задача 11. Доказать теорему о среднем по площади для гармонических функций.

Задача 12. Доказать, что функция $E(z) = (2\pi)^{-1}\ln|z|$ является фундаментальным решением для уравнения Лапласа на плоскости.

Задача 13. Доказать теорему об устранимой особой точке для гармонических функций.

Задача 14. Если ряд из неотрицательных гармонических в области D функций сходится хотя бы в одной точке из D, то он сходится равномерно внутри D.

Раздел 5. Приближение голоморфных функций.

Задача 1. Доказать справедливость теоремы Мергеляна для замыкания произвольной простейшей области в $\mathbb{C}$ (без условия спрямляемости границы).

Задача 2. Пусть X – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, $\Omega_0 = \Omega$ – его неограниченная компонента дополнения, а $\Omega_1, \cdots$ – ограниченные компоненты дополнения (если они есть). Фиксируем a_j в каждой из Ω_j. Доказать, что для любой $f\in \mathrm{A}(X)$ и произвольного $\varepsilon>0$, найдется $R(\cdot)$ – рациональная функция с полюсами, принадлежащими множеству $\{a_j\}_{j\geq 0}$ такая, что $\|f-R\|_X<\varepsilon$.

Задача 3. Пусть K – компакт, $\mathbb{C}\setminus K$ – связно, f голоморфна в окрестности компакта K. Тогда найдется $\{p_n\}$ – последовательность комплексных полиномов таких, что для всех $k\in\mathbb{Z}_+$ выполнено $p^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ при $n\to\infty$ (равномерно) на K.

Задача 4. Доказать следующий вариант теоремы Рунге: если область D односвязна в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathrm{A}(D)$, то найдется последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к f внутри D.

Задача 5. Справедлив ли прямой аналог второй теоремы Рунге для гармонических функций (и гармонических полиномов)?

Задача 6. Функцию $1/(z^4 + 4)$ приблизить равномерно на компакте $K = [-2, 2] \cup [-2i, 2i]$ с любой точностью последовательностью полиномов от z.

Задача 7. Функцию $\mathrm{tg}(z)$ приблизить равномерно на отрезке $[-2i, 2i]$ с любой точностью последовательностью полиномов от z.