

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
ТРЕТИЙ КУРС, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР, 2026 г
ЛЕКТОР С.В.ШАПОШНИКОВ

- (1) Лемма Цорна. Базис Гамеля. Линейный функционал. Ядро линейного функционала.
- (2) Теорема Хана–Банаха: вещественный и комплексный случай.
- (3) Непрерывные линейные функционалы. Норма линейного функционала. Полнота сопряженного пространства. Следствия из теоремы Хана–Банаха.
- (4) Теоремы Рисса для пространств последовательностей. Формулировки теорем Рисса для пространств интегрируемых функций и пространства непрерывных функций.
- (5) Второе сопряженное пространство. Каноническое вложение. Рефлексивные пространства.
- (6) Гильбертовы пространства. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса. Рефлексивность гильбертова пространства.
- (7) Ортонормированные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
- (8) Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Полнота системы $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ в $L^2[-\pi, \pi]$.
- (9) Существование базиса Фурье в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема Рисса–Фишера.
- (10) Линейные непрерывные операторы. Норма оператора. Теорема Банаха–Штейнгауза.
- (11) Теорема Банаха об открытости образа открытого множества. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Банаха о замкнутом графике.
- (12) Открытость множества обратимых операторов. Свойства резольвенты. Спектр оператора: непустота и компактность. Классификация точек спектра. Последовательность Вейля.
- (13) Сопряженный оператор A^* к ограниченному оператору A на гильбертовом пространстве. Равенство $\|A^*\| = \|A\|$. Равенство $\overline{\text{Im } A} = (\text{Ker } A^*)^\perp$.
- (14) Самосопряженный оператор. Квадратичная форма. Свойства спектра самосопряженного оператора.
- (15) Компактные операторы. Примеры. Свойства: линейность пространства компактных операторов, компактность композиции компактного и непрерывного операторов, замкнутость пространства компактных операторов.
- (16) Слабая сходимость последовательностей векторов сепарабельного гильбертова пространства. Ограниченность слабо сходящейся последовательности. Существование во всякой ограниченной последовательности слабо сходящейся подпоследовательности. Критерий компактности оператора на гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному оператору.
- (17) Теоремы Фредгольма. Спектр компактного оператора. Теорема Гильберта–Шмидта.
- (18) Определение и топология полинормированного пространства. Критерий непрерывности линейного функционала на полинормированном пространстве.
- (19) Эквивалентность семейств полунорм. Метризуемость и нормируемость топологии полинормированного пространства. Примеры полинормированных пространств: слабая и $*$ -слабая топологии.
- (20) Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Сходимость последовательностей в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ не задается метрикой. Семейство полунорм на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, задающее требуемую сходимость последовательностей.
- (21) Пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций. Регулярные обобщенные функции. Дельта функция. Равенство обобщенных функций на открытом множестве. Умножение обобщенной функции на гладкую функцию. Обобщенная производная. Вычисление обобщенной производной у функции Хевисайда и $\ln|x|$.
- (22) Решение уравнения $F' = G$ в обобщенных функциях. Носитель обобщенной функции. Вид обобщенной функции с компактным носителем (формулировка). Описание обобщенных функций с носителем $\{0\}$.
- (23) Свёртка интегрируемых функций: определение, существование, оценка L^1 -нормы. Свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Отсутствие единицы. Аппроксимативная единица или дельта-образная последовательность.
- (24) Преобразование Фурье интегрируемой функции и его свойства. Преобразование Фурье производной и дифференцирование преобразования Фурье. Формула обращения. Инъективность преобразования Фурье. Преобразование Фурье свёртки.
- (25) Пространство $S(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье — линейный гомеоморфизм $S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$. Определение преобразования Фурье функций из $L^2(\mathbb{R})$. Определение преобразования Фурье обобщенной функции из $S'(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье дельта-функции, единицы, функции Хевисайда.