

**ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
6 СЕМЕСТР, ВТОРОЙ ПОТОК, 2026 г.**

1. Определение спектра. Теорема об устойчивости обратимости. Оценка нормы обратного оператора. Открытость резольвентного множества.

2. Определение резольвенты, ее непрерывность. Тождество Гильберта, голоморфность резольвенты. Теорема: спектр не пуст и ограничен нормой оператора.

3. Спектральный радиус: определение через инфимум и через предел. Ограниченность спектра спектральным радиусом.

4. Классификация спектра. Теорема Филлипса (для банахова и гильбертова сопряженного).

5. Спектр многочлена от оператора. Спектр обратного оператора. Точка Вейля. Теорема Вейля.

6. Билинейная и квадратичная форма оператора. Теорема о представлении. Восстановление билинейной формы по квадратичной.

7. Самосопряженный оператор: его квадратичная форма, остаточный спектр нормального оператора, теорема Вейля, локализация спектра в отрезке $[m, M]$, точность локализации.

8. Теорема о спектре компактного оператора. Альтернативная классификация спектра.

9. Теорема Гильберта–Шмидта.

10. Теорема об операторе смены ОНБ. Три теоремы типа Гильберта–Шмидта.

11. Лемма о норме многочлена от s/s оператора. Теорема о функциональном исчислении непрерывных функций от s/s оператора.

12. Циклический вектор и оператор с простым спектром. Спектральная теорема в терминах оператора умножения для s/s оператора с простым спектром.

13. Критерий простого спектра для s/s компактного оператора. Спектральная теорема в терминах оператора умножения для произвольного s/s оператора.

14. Вычисление простых функций от s/s оператора. Проекторнозначная мера. Спектральная теорема для s/s оператора в терминах интеграла по проекторнозначной мере.

15. Топологические пространства: основные определения. Примеры. Отображения между топологическими пространствами.

16. ЛТП и ЛВП: основные факты. Полинормированные пространства. Утверждение: любое полинормированное пространство есть ЛВП.

17. Функционал Минковского. Теорема: любое ЛВП есть полинормированное пространство.

18. Полинормированные пространства: основные факты — эквивалентность систем полунорм, сходимость последовательностей. Пространства основных функций. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}$.

19. Линейные операторы в полинормированных пространствах. Непрерывность, ограниченность. Замкнутость ядра непрерывного функционала.

20. Теорема Хана–Банаха в полинормированных пространствах.

21. Метризуемость счетно–нормированных пространств. Нормируемость конечно–нормированных пространств. Пространства Фреше.

22. Три пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные функции. Теорема об эквивалентности непрерывности и секвенциальной непрерывности функционалов.

23. Полнота основных пространств. Полнота пространств обобщенных функций. Формулы Сохоцкого.

24. Семь непрерывных вложений (основные пространства, пространства обобщенных функций). Плотность вложений $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

25. Носитель и сингулярный носитель обобщенных функций. Дельта-последовательности. Пример. Теорема о носителе функций из $\mathcal{E}'$.

26. Операторы умножения на гладкую функцию и дифференцирования в $\mathcal{D}'$.

27. Ядро оператора дифференцирования. Первообразная обобщенных функций.

28. Теорема о конечности порядка обобщенных функций. Структура обобщенных функций с точечным носителем.

29. Классическое преобразование Фурье. Теорема и примеры.

30. Свойства преобразования Фурье $FM = iDF$, $FD = iMF$. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}$.

31. Преобразование Фурье быстро убывающих функций и функций с компактным носителем. Унитарность преобразования Фурье на $\mathcal{S}$. Плотность $\mathcal{S}$ в $L_1(\mathbb{R})$. Теорема единственности для классического преобразования Фурье.

32. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Обратное преобразование в $L_2(\mathbb{R})$. Спектр и собственные функции преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

33. Преобразование Фурье — изоморфизм в $\mathcal{S}$ и в $\mathcal{S}'$. Теорема об обращении классического преобразования Фурье.

34. Банаховы алгебры: определение и примеры. Свертка в L_1 и ее свойства. Дельта-последовательность.

35. Преобразование Фурье свертки. Гомоморфизм алгебр. Свертка с обобщенной функцией — из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.