

Программа курса «Функциональный анализ»

2026, 6-й семестр, 1-ой поток

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Спектр и резольвента оператора. Замкнутость спектра. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве, его спектр.
2. Аналитичность резольвенты. Теорема о непустоте спектра.
3. Критерий самосопряженности оператора в терминах квадратичной формы. Вещественность спектра самосопряженного оператора.
4. Экстремальные значения квадратичной формы самосопряженного оператора, их принадлежность спектру.
5. Числовой образ оператора. Теорема Теплица-Хаусдорфа о выпуклости числового образа.
6. Оценка резольвенты вне числового образа (доказательство вместе с леммами).
7. Теорема Гильберта-Шмидта для самосопряженных компактных операторов.
8. Теорема Фредгольма.
9. Аналитическая теорема Фредгольма.
10. Классификация спектра. Существенный (непрерывный) и дискретный спектры. Примеры. Равенство $\operatorname{spec} A = \operatorname{spec}_{ess} A \sqcup \operatorname{spec}_d A$ для самосопряженного оператора.
11. Теорема Рисса о спектре компактного оператора. Теоремы Вейля о спектре возмущения самосопряженного оператора компактными операторами.
12. Полинормированные, счетно-нормированные пространства и пространства Фреше. Пространства $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и топология в них.
13. Теорема о метризуемости счетно нормированного пространства.
14. Функционал Минковского. Топология метризуемого полинормированного пространства может быть задана счетной системой полунорм.
15. Теорема об оценке линейного непрерывного функционала в пространстве Фреше.

16. Пространства $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ являются пространствами Фреше (определить топологию и доказать полноту).
17. Топология в $\mathcal{D}(\Omega)$. Критерий сходимости в $\mathcal{D}(\Omega)$. Операции в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$.
18. Нетривиальность пространства $\mathcal{D}(\Omega)$. Нормируемость этого пространства.
19. Регулярные функции в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Инъективность вложения $L_{1,loc} \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Примеры сингулярных обобщенных функций.
20. Носитель обобщенной функции. Компактность носителя для функций из $\mathcal{E}'(\Omega)$. Обратно, любая обобщенная функция с компактным носителем является функцией из $\mathcal{E}'(\Omega)$.
21. Существование первообразной от обобщенной функции.
22. Теорема о представлении обобщенной функций с компактным носителем (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$.
23. Преобразование Фурье осуществляет топологический изоморфизм пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ на себя. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
24. Свертка регулярных функций и ее свойства.
25. Прямые произведения и свертки обобщенных функций. Фундаментальные решения.
26. Теорема Соболева о вложении пространства $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ в пространство $C_0(\mathbb{R}^d)$.
27. Теоремы об отображении спектра и норме операторного полинома.
28. Теорема о функциональном исчислении непрерывных функций от самосопряженных операторов.
29. Теорема о сильном пределе монотонной последовательности операторов.
30. Схема построения спектральных проекторов. Спектральная теорема в интегральных терминах. (Схема доказательства).