

Билеты к курсу «Функциональный анализ»
5 семестр (осень 2025), лектор: профессор В. И. Богачев

1. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Полнота и сепарабельность. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.
2. Нормированные пространства. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства M части банахова пространства $B(M)$ и существование пополнения M .
3. Топологические пространства. Компактные множества и их свойства.
4. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей.
5. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.
6. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
7. Критерии компактности в $B(\Omega)$, $C[a, b]$ (теорема Асколи – Арцела) и l^2 .
8. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера.
9. Евклидовы пространства. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
10. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
11. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса – Фишера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
12. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора.
13. Теорема Хана – Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство.
14. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам (без доказательства).
15. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Сопряженный оператор.
16. Теорема Банаха – Штейнгауза.
17. Теорема Банаха об обратном операторе (формулировка). Теорема о замкнутом графике (вывод из теоремы об обратном операторе).
18. Слабая сходимость в банаховом пространстве и *-слабая сходимость в сопряженном. Ограниченность слабо ограниченных множеств. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве и в $C[a, b]$.
19. Выделение *-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном банаховом пространстве. Случай гильбертова пространства.
20. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.