

Программа курса «Функциональный анализ» для потока экономистов,
5 семестр, осень 2025 года. Лектор – доцент Куприков Ю.Е.

1. Метрические и топологические пространства. Примеры. Полнота. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категориях.
2. Теорема о пополнении метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений.
3. Нормированные пространства. Теорема Хаусдорфа о максимальнойности (б/д). Базис Гамеля. Равномощность базисов Гамеля в линейном пространстве. Норма оператора. Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Полнота пространства ограниченных линейных операторов, отображающих одно банахово пространство в другое.
4. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о пределе последовательности ограниченных операторов.
5. Теорема Банаха об открытом отображении.
6. Теорема Банаха об обратном операторе. Примеры неослабляемости требований полноты. Теорема о замкнутом графике.
7. Теорема Хана-Банаха (действительный и комплексный вариант).
8. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в $C[0,1]$. Теорема о единственности производящей функции.
9. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в $L_p [0,1]$.
10. Компактность в метрических пространствах. Теорема о свойствах, эквивалентных вполне ограниченности, компактности и предкомпактности.
11. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном нормированном пространстве. Теорема о замкнутости конечномерного подпространства нормированного пространства. Теорема Рисса об ε -перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в б/м нормированном пространстве.
12. Теорема Арцела в $C[a,b]$.
13. Слабая и слабая* сходимости. Критерий слабой сходимости. Теорема Банаха о слабой* компактности единичного шара в пространстве, сопряженном к сепарабельному нормированному.
14. Компактные операторы. Основные свойства. Примеры.
15. Спектр оператора. Теорема о свойствах спектра и спектральном радиусе.
16. Гильбертово пространство. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Теорема о расстоянии до выпуклого замкнутого множества. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
17. Ортогональные системы. Теорема об ортогонализации. Ряды Фурье. Экстремальное свойство рядов Фурье. Неравенство Бесселя.
18. Полные ортонормированные системы. Теорема о разложении в ряд Фурье. Равенство Парсеваля. Теорема Рисса-Фишера. Теорема Гильберта об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
19. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Основные свойства. Основное тождество.
20. Компактные операторы и слабая сходимости. Критерий компактности оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема о слабой компактности единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема о компактности сопряженного оператора.
21. Самосопряженные операторы. Теорема об отображении спектра. Непрерывные функции от самосопряженных операторов. Теорема о квадратном корне из положительного оператора.
22. Теорема о спектре самосопряженного оператора.

23. Теорема Гильберта-Шмидта.
24. Фредгольмовы операторы. Теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
25. Теорема о структуре спектра компактного оператора в гильбертовом пространстве.

Лектор
Зав. кафедрой

доц. Куприков Ю.Е.
академик РАН, проф. Кашин Б.С.