

- (1) Длина подмножества прямой. Аддитивность и суб-аддитивность влекут сигма-аддитивность. Множество Витали.
- (2) Алгебра. Полуалгебра. Алгебра, порожденная полуалгеброй. Примеры.
- (3) Сигма алгебра. Сигма алгебра, порожденная набором множеств. Борелевская сигма-алгебра. Борелевская сигма алгебра на числовой прямой порождается интервалами, порождается отрезками, порождается лучами.
- (4) Меры. Примеры мер. Мера Лебега на алгебре конечных объединений параллелепипедов в $[a, b]^n$.
- (5) Необходимые и достаточные условия счетной аддитивности. Компактные классы. Счетная аддитивность меры Лебега на алгебре конечных объединений параллелепипедов в $[a, b]^n$.
- (6) Борелевские меры на $\mathbb{R}^n$. Приближение борелевских множеств открытыми и замкнутыми множествами. Приближение борелевских множеств компактами.
- (7) Внешняя мера. Измеримые множества. Теорема Каратеодори–Лебега (без доказательства). Построение меры Лебега на $[a, b]^n$ и на $\mathbb{R}^n$. Структура измеримых по Лебегу множеств.
- (8) Прообраз множества при отображении. Равенство $f^{-1}(\sigma(S)) = \sigma(f^{-1}(S))$.
- (9) Измеримые функции и их свойства: проверка на порождающем множестве, борелевская функция от измеримых функций является измеримой функцией, поточечный предел измеримых функций является измеримой функцией.
- (10) Измеримые относительно меры функции. Сходимость по мере и почти всюду. Пример Рисса.
- (11) Лемма Бореля — Кантелли. Теорема Рисса. Теорема Егорова.
- (12) Простые функции. Приближение измеримой функции простыми функциями.
- (13) Интеграл Лебега от простых функций и его свойства.
- (14) Интеграл Лебега от неотрицательных функций. Монотонность. Неравенство Чебышёва.
- (15) Теорема Беппо Леви и лемма Фату.
- (16) Общее определение интеграла Лебега. Линейность и монотонность интеграла.
- (17) Интеграл Лебега: неравенства, приближение простыми функциями, абсолютная непрерывность.
- (18) Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
- (19) Связь интеграла Лебега и интеграла Римана.
- (20) Произведение сигма алгебр. Измеримость сечений. Измеримость графика и подграфика.
- (21) Произведение мер. Принцип Кавальери (без доказательства). Интеграл Лебега от неотрицательной функции равен мере подграфика.
- (22) Теорема Фубини. Теорема Тонелли.
- (23) Дифференцирование интеграла Лебега с переменным верхним пределом (без доказательства). Абсолютно непрерывные функции и формула Ньютона–Лейбница. Формула интегрирования по частям и формула замены переменной для интеграла по мере Лебега.
- (24) Метрические пространства. Сепарабельность. Подмножество сепарабельного пространства является сепарабельным пространством.
- (25) Полнота метрического пространства. Принцип вложенных шаров.
- (26) Теорема Банаха о сжимающем отображении.
- (27) Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства. Теорема Бэра.
- (28) Нормированные пространства. Эквивалентность норм. Лемма о почти перпендикуляре.
- (29) Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского. Пространства L^p и их полнота.
- (30) Вполне ограниченные множества. Теорема Больцано.
- (31) Свойства компактов в метрических пространствах. Критерии компактности.
- (32) Теорема Арцела–Асколи.