ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
5 СЕМЕСТР, ВТОРОЙ ПОТОК, 2025 г.

1. Метрические пространства, открытые и замкнутые множества, замыкание. Полнота. Теорема о пополнении.

2. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра. Теорема о неподвижной точке.

3. Нормированные пространства. Эквивалентность норм в конечномерном случае.

4. Банаховы пространства. Теорема о пополнении (без доказательства существования). Полнота $C[0,1]$. Другие примеры.

5. Подпространства. Замкнутость конечномерного подпространства, существование наилучшего приближения.

6. Лемма об ε–перпендикуляре. Прямые суммы подпространств. Топологичность суммы замкнутого и конечномерного.

7. Евклидовы и гильбертовы пространства. Естественная норма. Теорема Йордана—фон-Неймана.

8. Ортопроекция на замкнутое подпространство — существование, единственность, наилучшее приближение. Ортогональное дополнение, разложение пространства в ортогональную сумму.

9. ПОНС: существование, экстремальное свойство. ОНБ, равенство Парсеваля, замкнутость. Теорема Рисса—Фишера.

10. Изоморфзим гильбертовых пространств. Неравенство Бесселя. Наилучшее приближение в виде ряда Фурье.

11. Компактность, счетная компактность, секвенциальная компактность, вполне ограниченность. Теорема об эквивалентности.

12. Свойства компактных множеств. Предкомпактность — три эквивалентных определения.

13. Критерии компактности: Арцела–Асколи, в абстрактном гильбертовом пространстве, в пространстве сходящихся последовательностей, в $L_p[0,1]$, $p \in [1,\infty)$ (последний — без доказательства).

14. Линейные функционалы, непрерывность и ограниченность, ядро. Примеры.

15. Общий вид линейных непрерывных функционалов: в конечномерном случае, в ℓ_p, $p \in [1,\infty)$, в гильбертовом пространстве.

16. Теорема Хана–Банаха (для вещественных нормированных сепарабельных пространств). Теорема Сухомлинова.

17. Сопряженное пространство, полнота. Описание $(\ell_p)^*$, $p \in [1, \infty)$ и H^*, где H гильбертово.

18. Теорема Рисса — описание $(C[0,1])^*$. Описание c^* и $(L_p[0,1])^*$, $p \in [1, \infty)$ (последнее — без доказательства).

19. Второе сопряженное, каноническое вложение, рефлексивность. Примеры: ℓ_p, $p \in [1, \infty)$. Теорема о пополнении нормированного пространства: доказательство существования пополнения. Критерий Джеймса (с доказательством только в одну сторону).

20. Операторы: непрерывность и ограниченность, ядро и образ. Норма оператора. Теорема Банаха–Штейнгауза.

21. Обратный оператор. Теорема об открытом отображении. Теорема Банаха об обратном. Следствия. Теорема о замкнутом графике.

22. Слабая сходимость: определение, свойства, ограниченность. Слабая фундаментальность и слабая полнота. Слабая секвенциальная предкомпактность ограниченных множеств.

23. Операторные сходимости: определение, свойства, ограниченность. Примеры: сдвиги в ℓ_p.

24. Эрмитов сопряженный: существование, единственность, свойства. Пример. Банахов сопряженный: его свойства, связь с эрмитовым сопряженным.

25. Компактные операторы. Примеры. Свойства: образ ограниченного множества, линейная комбинация компактных, композиция с ограниченным, предел.

26. Компактные операторы. Примеры. Свойства: преобразование сходимости, достижимость нормы, приближение конечномерными, компактность сопряженного.

27. Фредгольмовы операторы. Фредгольмовость $I - K$, где K — компактный.

28. Альтернатива Фредгольма. Теорема о равенстве индексов.

29. Интегральные операторы в $C[a,b]$ (с непрерывным и с треугольным ядром), $L_2[a,b]$ (с квадратично суммируемым ядром) — доказательство компактности. Примеры уравнений Фредгольма.