

Билеты к курсу «Функциональный анализ» 6 семестр

1. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.
2. Спектр диагонального оператора. Спектр оператора умножения на функцию. Теорема об отображении спектров для многочленов.
3. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве (формулировка). Альтернатива Фредгольма ($\text{Ker}(I - K) = 0 \iff (I - K)X = X$).
4. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
5. Равенства

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|: \lambda - \text{точка спектра } A\}$$

для самосопряженного оператора A .

6. Теорема Гильберта – Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
7. Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ и сходимости в них. Плотность $\mathcal{D}$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}^1)$.
8. Обобщенные функции классов $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$. Производная обобщенной функции. Равенство $(\ln|x|)' = \text{V.P.} \frac{1}{x}$.
9. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства (непрерывность, ограниченность, производная преобразования Фурье, преобразование Фурье производной).
10. Формула обращения для преобразования Фурье в случае интегрируемого преобразования Фурье. Формула обращения в точках дифференцируемости (формулировка). Преобразование Фурье в $\mathcal{S}$ и его непрерывность.
11. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Инъективность преобразования Фурье. Полнота системы функций Эрмита.
12. Унитарные операторы. Преобразование Фурье в L^2 и теорема Планшереля.
13. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$. Преобразование Фурье дельта-функции. Согласованность преобразований Фурье в L^1 , L^2 и $\mathcal{S}'$.
14. Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.
15. Пространства С.Л. Соболева $W^{p,k}$ и их характеристика через пополнение по соболевской норме.
16. Описание $W^{2,k}$ через преобразование Фурье. Теоремы вложения в L^q и C (без доказательства).
17. Унитарная эквивалентность операторов. Спектр оператора преобразования Фурье и спектр оператора свертки.
18. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство $\|f(A)\| = \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$ для самосопряженного оператора A .
19. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для случая оператора с циклическим вектором).
20. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.

Лектор
профессор

В. И. Богачев

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор

Б. С. Кашин