

Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, отделение механики, осень 2024/25 уч.г.

1. Метрические и нормированные пространства, примеры. Полнота. Лемма о пополнении подпространства в полном метрическом пространстве.
2. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений.
3. Теорема о пополнении метрического пространства.
4. Теорема Линделефа о выделении счетного подпокрытия. (Пред)компактность и вполне ограниченность в метрических пространствах, элементарные свойства.
5. Свойства, равносильные предкомпактности в метрических пространствах. Критерий (пред)компактности Хаусдорфа.
6. Теорема Арцела — Асколи о (пред)компактности в пространстве непрерывных функций на компакте.
7. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шаров в бесконечномерном нормированном пространстве.
8. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
9. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
10. Связь σ -аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в $\mathbb{R}$ и ее σ -аддитивность.
11. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
12. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств.
13. Счётная аддитивность меры Лебега. σ -конечные меры и их продолжение по Лебегу (без обоснования). Теорема о структуре измеримых множеств.
14. Пространство с мерой. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
15. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
16. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова. Теорема Лузина (без док-ва).
17. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
18. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.
19. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
20. Теорема Лебега о предельном переходе. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.
21. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
22. Произведение систем множеств. Произведение мер. Счетная аддитивность произведения счетно-аддитивных мер.
23. Теорема Фубини (без доказательства). Достаточное условие существования двойного интеграла — теорема Тонелли. Интегрирование комплекснозначных функций.
24. Заряды. Разложения Хана и Жордана. Теорема Радона — Никодима (без док-ва).
25. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства $L_p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$.
26. Полнота пространств $L_p(X)$, $1 \leq p < \infty$.

27. Функции ограниченной вариации и их свойства. Интеграл Римана — Стильеса. Его связь с интегралом Лебега по мере Стильеса, достаточные условия существования интеграла Римана — Стильеса.

28. Существование (без док-ва) и интегрируемость производной от монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Производная неопределённого интеграла Лебега и формула Ньютона — Лейбница (обе теоремы - без док-ва). Достаточное условие сведения интеграла Римана — Стильеса к интегралу Лебега.

29. Интегрирование по частям в интеграле Лебега. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН

Б. С. Капин