Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (3 курс отделения математики, 2 поток, 2024/2025 гг.)

1. Метрические пространства. Свойства полных метрических пространств (принцип сжимающих отображений, теорема о замкнутых шарах).
2. Теорема Бэра.
3. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Сепарабельные пространства. Критерий полноты подпространства метрического пространства.
4. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
5. Евклидовы пространства. Тождество параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского. Существование ортогональной проекции и ортогонального дополнения в гильбертовом пространстве.
6. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Полные и замкнутые системы. Условия базисности ортонормированной системы.
7. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
8. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
9. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
10. Критерий предкомпактности множества в пространствах ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$.
11. Критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a,b]$.
12. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора. Непрерывные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов.
13. Теорема Хана-Банаха в случае вещественного сепарабельного нормированного пространства.
14. Теорема Хана-Банаха в случае комплексного сепарабельного нормированного пространства. Следствия из теоремы Хана–Банаха. Сопряжённое пространство и его полнота.
15. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве c_0.
16. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах ℓ_p при $1 \leqslant p < \infty$. Полнота пространств ℓ_p при $1 < p \leqslant \infty$.
17. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах $L_p(\Omega, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.
18. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в $C[a;b]$.
19. Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве.
20. Слабая и $*$-слабая сходимости. Сходимости в $B(X,Y)$.
21. Топология $\sigma(X, X^+)$. Двойственность $(X, \sigma(X, X^+))^* = X^+$. Слабая и $*$-слабая топологии.
22. Сопряжённые операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство $\|A\| = \|A'\| = \|A^*\|$. Самосопряжённые операторы. Ортогональные проекторы.
23. Теорема Банаха–Штейнгауза. Слабо ограниченные множества.
24. Компактные операторы. Свойства компактных операторов (сумма, композиция с ограниченным, предельный переход).
25. Теорема о действии компактного оператора на слабо сходящуюся последовательность в нормированном пространстве.
26. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряжённого оператора (в гильбертовом пространстве).
27. Компактность интегральных операторов в пространствах $C[a;b]$ и $L_2[a;b]$.

28. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Устойчивость обратимости операторов при малых возмущениях.
29. Спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве. Классификация и основные свойства.
30. Спектр сопряженного оператора, спектр подобного оператора.
31. Нормальные операторы и их свойства. Спектр нормального оператора.
32. Последовательность Вейля. Спектр оператора умножения на функцию в $C[a;b]$ и в $L_2[a;b]$.
33. Спектральный радиус оператора (формула без доказательства). Спектральный радиус самосопряженного оператора.
34. Спектр самосопряженного оператора: вещественность и локализация.
35. Свойства квадратичной формы самосопряженного оператора: равенство $\sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| = \|A\|$. Включения $m, M \in \sigma(A)$.
36. Слабая компактность единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве.
37. Теорема Гильберта–Шмидта (для сепарабельных гильбертовых пространств).
38. Конечномерность ядра и замкнутость образа оператора $I - A$, где $A \in \mathcal{K}(H)$.
39. Соотношения двойственности для ядра и образа операторов $I - A$ и $I - A^*$, $A \in \mathcal{K}(H)$. Первая теорема Фредгольма.
40. $\mathrm{Ker}(I - A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(I - A) = H$. Альтернатива Фредгольма.
41. Третья теорема Фредгольма
42. Спектр компактного оператора.

Лектор, профессор — И. А. Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН, профессор — Б. С. Кашин