Программа курса «Функциональный анализ» для потока механиков,
весенний семестр 2024 года. Лектор – доцент Куприков Ю.Е.

1. Полукольца, кольца, алгебры и σ-алгебры множеств. Теорема о структуре минимального кольца, содержащего данное полукольцо. Существование σ-алгебры, порожденной классом множеств. Структура открытых множеств на прямой. Борелевская σ -алгебра.
2. Конечные аддитивные и σ-аддитивные меры на полукольцах, их свойства. Пример аддитивной, но не σ-аддитивной функции множества на алгебре. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
3. Внешняя мера и ее свойства. Определение измеримого множества. Теорема Лебега о σ-аддитивности внешней меры на σ -алгебре измеримых множеств. Единственность продолжения.
4. Построение меры Лебега на прямой и в многомерном пространстве. Основные свойства меры Лебега. σ - конечные меры. Непрерывность и полнота.
5. Измеримые функции. Измеримость суммы, произведения, частного, композиции и предела измеримых функций.
6. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
7. Сходимость по мере. Ее свойства и связь со сходимостью почти всюду.
8. Теорема Рисса. Теорема Егорова. Теорема Лузина (б/д).
9. Интеграл Лебега: определение и основные свойства.
10. Критерий интегрируемости. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема о среднем.
11. Предельный переход в интеграле Лебега: теорема Б. Леви о монотонной сходимости.
12. Теорема Фату и теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
13. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
14. Пространства интегрируемых функций L^p. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Полнота L^p.
15. Всюду плотные множества в L^p. Связь различных видов сходимости измеримых функций.
16. Абсолютно непрерывные функции. Абсолютная непрерывность неопределенного интеграла от интегрируемой функции. Основные свойства. Свойство Лузина. Композиция абсолютно непрерывных функций. Теорема Банаха-Зарецкого (б/д).
17. Дифференциальные свойства абсолютно непрерывных функций: теорема о дифференцировании абсолютно непрерывной функции и теорема о первообразной интегрируемой по Лебегу функции (б/д). Теорема об интегрировании по частям абсолютно непрерывных функций. Критерий липшицевости.
18. Производные числа. Критерий монотонности. Восстановление функции по ее интегрируемой производной.
19. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в $L^p[0,1]$.
20. Теорема о структуре измеримых множеств. Произведение пространств с мерами. Теорема о σ –аддитивности декартова произведения σ –аддитивных мер.
21. Теорема Фубини.
22. Спектр оператора. Его классификация. Теорема о свойствах спектра.
23. Теорема о спектральном радиусе.
24. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Его свойства. Самосопряженные операторы. Их свойства.
25. Теорема о спектре самосопряженного оператора.
26. Компактные операторы. Основные свойства. Примеры.

27. Компактные операторы и слабая сходимость. Критерий компактности оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема о компактности сопряженного оператора.
28. Теорема Гильберта-Шмидта.
29. Теорема об отображении спектра. Непрерывные функции от самосопряженных операторов.
30. Положительные операторы. Теорема о существовании и единственности квадратного корня.
31. Фредгольмовы операторы. Теорема Фредгольма.
32. «Классические» теоремы Фредгольма и теорема о структуре спектра компактного оператора.

Лектор доц. Куприков Ю.Е.
Зав. кафедрой академик РАН, проф. Кашин Б.С.