ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
6 СЕМЕСТР, ВТОРОЙ ПОТОК, 2024 г.

1. Определение спектра. Теорема об устойчивости обратимости. Оценка нормы обратного оператора. Открытость резольвентного множества.

2. Определение резольвенты, ее непрерывность. Тождество Гильберта, голоморфность резольвенты. Теорема: спектр не пуст и ограничен нормой оператора.

3. Спектральный радиус: определение через инфимум и через предел. Ограниченность спектра спектральным радиусом.

4. Классификация спектра. Теорема Филлипса (для банахова и гильбертова сопряженного).

5. Спектр многочлена от оператора. Спектр обратного оператора. Точка Вейля. Теорема Вейля.

6. Билинейная и квадратичная форма оператора. Теорема о представлении. Восстановление билинейной формы по квадратичной.

7. Самосопряженный оператор: его квадратичная форма, теорема Вейля, локализация спектра в отрезке $[m, M]$, точность локализации.

8. Теорема о спектре компактного оператора. Теорема о спектре компактного возмущения. Альтернативная классификация спектра.

9. Теорема Гильберта–Шмидта.

10. Спектр унитарного оператора. Остаточный спектр нормального оператора. Норма оператора интегрирования в $L_2[0, 1]$.

11. Теорема об операторе смены ОНБ. Три теоремы типа Гильберта–Шмидта.

12. Лемма о норме многочлена от с/с оператора. Теорема о функциональном исчислении непрерывных функций от с/с оператора.

13. Циклический вектор и оператор с простым спектром. Спектральная теорема в терминах оператора умножения для с/с оператора с простым спектром.

14. Критерий простого спектра для с/с компактного оператора. Спектральная теорема в терминах оператора умножения для произвольного с/с оператора.

15. Теорема о функциональном исчислении борелевских функций от с/с оператора.

16. Проекторнозначная мера с/с оператора. Спектральная теорема для с/с оператора в терминах интеграла по проекторнозначной мере.

17. Абстрактное разложение единицы. Теорема о порождении с/с оператора интегралом по разложению единицы.

18. Топологические пространства: основные определения. Примеры.
19. Отображения между топологическими пространствами.
20. ЛТП и ЛВП: основные факты. Полинормированные пространства. Утверждение: любое полинормированное пространство есть ЛВП.
21. Функционал Минковского. Теорема: любое ЛВП есть полинормированное пространство.
22. Полинормированные пространства: основные факты — эквивалентность систем полунорм, сходимость последовательностей. Пространства основных функций. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}$.
23. Линейные операторы в полинормированных пространствах. Непрерывность, ограниченность. Замкнутость ядра непрерывного функционала.
24. Теорема Хана–Банаха в полинормированных пространствах. Следствия.
25. Теорема о разделении выпуклых множеств. Теорема Банаха–Штейнгауза в полинормированных пространствах.
26. Метризуемость счетно–нормированных пространств. Нормируемость конечно–нормированных пространств. Пространства Фреше. Теорема Банаха об обратном (без доказательства).
27. Три пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные функции. Теорема об эквивалентности непрерывности и секвенциальной непрерывности функционалов.
28. Полнота основных пространств. Полнота пространств обобщенных функций. Формулы Сохоцкого.
29. Семь непрерывных вложений (основные пространства, пространства обобщенных функций). Плотность вложений $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.
30. Носитель и сингулярный носитель обобщенных функций. Дельта–последовательности. Пример. Теорема о носителе функций из $\mathcal{E}'$.
31. Операторы умножения на гладкую функцию и дифференцирования в $\mathcal{D}'$.
32. Ядро оператора дифференцирования. Первообразная обобщенных функций.
33. Теорема о конечности порядка обобщенных функций. Структура обобщенных функций с точечным носителем.
34. Классическое преобразование Фурье. Теорема и примеры.
35. Свойства преобразования Фурье $FM = iDF$, $FD = iMF$. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}$.

36. Преобразование Фурье быстро убывающих функций и функций с компактным носителем. Унитарность преобразования Фурье на $\mathcal{S}$. Плотность $\mathcal{S}$ в $L_1(\mathbb{R})$. Теорема единственности для классического преобразования Фурье.

37. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Обратное преобразование в $L_2(\mathbb{R})$. Спектр и собственные функции преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

38. Преобразование Фурье — изоморфизм в $\mathcal{S}$ и в $\mathcal{S}'$. Теорема об обращении классического преобразования Фурье.

39. Банаховы алгебры: определение и примеры. Свертка в L_1 и ее свойства. Дельта–последовательность.

40. Преобразование Фурье свертки. Гомоморфизм алгебр. Свертка с обобщенной функцией — из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

41. Замкнутые плотно определенные неограниченные операторы. Замыкаемость. Достаточное условие замыкаемости. Оператор дифференцирования.

42. Расширения и сужения оператора. Сопряженный оператор. Теорема о его плотной определенности. Оператор дифференцирования. Второй сопряженный. Самосопряженные и симметрические операторы.