Программа курса «Функциональный анализ»
2024, 6-й семестр, 1-ой поток
Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Спектр и резольвента оператора. Замкнутость спектра. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве, его спектр.

2. Аналитичность резольвенты. Теорема о непустоте спектра.

3. Теорема Гельфанда о спектральном радиусе.

4. Критерий самосопряженности оператора в терминах квадратичной формы. Вещественность спектра самосопряженного оператора.

5. Экстремальные значения квадратичной формы самосопряженного оператора, их принадлежность спектру.

6. Числовой образ оператора. Теорема Теплица-Хаусдорфа о выпуклости числового образа.

7. Оценка резольвенты все числового образа (доказательство вместе с леммами).

8. Теорема Гильберта-Шмидта для самосопряженных компактных операторов.

9. Теорема Фредгольма.

10. Аналитическая теорема Фредгольма.

11. Классификация спектра. Существенный (непрерывный) и дискретный спектры. Примеры. Равенство $spec\, A = spec_{ess}\, A \bigsqcup spec_d\, A$ для самосопряженного оператора.

12. Теорема Рисса о спектре компактного оператора. Теоремы Вейля о спектре возмущения самосопряженного оператора компактными операторами.

13. Полинормированные, счетно-нормированные пространства и пространства Фреше. Пространства $\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и топология в них.

14. Теорема о метризуемости счетно нормированного пространства.

15. Функционал Минковского. Топология метризуемого полинормированного пространства может быть задана счетной системой полунорм.

16. Теорема об оценке линейного непрерывного функционала в пространстве Фреше.

17. Пространства $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ являются пространствами Фреше (определить топологию и доказать полноту).

18. Топология в $\mathcal{D}(\Omega)$. Критерий сходимости в $\mathcal{D}(\Omega)$. Операции в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$.

19. Нетривиальность пространства $\mathcal{D}(\Omega)$. Неметризуемость этого пространства.

20. Регулярные функции в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Инъективность вложения $L_{1,loc} \to \mathcal{D}'(\Omega)$. (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Примеры сингулярных обобщенных функций.

21. Носитель обобщенной функции. Компактность носителя для функций из $\mathcal{E}'(\Omega)$. Обратно, любая обобщенная функция с компактным носителем является функцией из $\mathcal{E}'(\Omega)$.

22. Существование первообразной от обобщенной функции.

23. Теорема о представлении обобщенной функций с компактным носителем (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

24. Преобразование Фурье осуществляет топологический изоморфизм пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в себя. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

25. Свертка регулярных функций и ее свойства.

26. Прямые произведения и свертки обобщенных функций. Фундаментальные решения.

27. Теорема вложения Соболева (доказательство при $p = 2$).

28. Теоремы об отображении спектра и норме операторного полинома.

29. Теорема о функциональном исчислении непрерывных функций от самосопряженных операторов.