ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

(3 курс, экономпоток)

1. Принцип сжимающих отображений. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэ́ра о категории.
2. Эквивалентные определения непрерывности отображений метрических пространств. Принцип продолжения по непрерывности равномерно непрерывных отображений.
3. Ограниченные множества в нормированном пространстве. Эквивалентные определения непрерывности линейных отображений. Принцип равностепенной непрерывности.
4. Эквивалентные определения компактности множеств в метрическом пространстве. Критерий компактности Хаусдо́рфа.
5. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ $(0<p<\infty)$.
6. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{C}(K)$ (теорема Арце́ла–Аско́ли).
7. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Эквивалентность норм. Теоремы о существовании и единственности наилучшего приближения в нормированном пространстве.
8. Лемма Ри́сса о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности единичного шара в нормированном пространстве.
9. Теорема о полноте пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов. Принцип равномерной ограниченности (теорема Ба́наха–Штейнга́уза).
10. Лемма Цо́рна (как аксиома теории множеств). Теорема Ха́на–Ба́наха о продолжении линейных функционалов и ее следствие для нормированных пространств.
11. Теорема Ри́сса об общем виде функционалов на пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$. Теорема об общем виде функционалов на пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu), 1\leqslant p<\infty$, (без доказательства).
12. Понятие равномерной, сильной и слабой сходимости в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов. Критерий сильной сходимости в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.
13. Каноническое вложение $J:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}^{**}$ нормированного пространства во второе сопряженное пространство. Критерий слабой* сходимости в $\boldsymbol{E}^*$ и критерий слабой сходимости в $\boldsymbol{E}$.
14. Неравенства Коши́–Буняко́вского, треугольника и Бе́ппо Ле́ви в евклидовом пространстве. Доказательство строгой нормируемости евклидова пространства.
15. Существование и единственность наилучшего приближения в гильбертовом пространстве. Формула величины наилучшего приближения конечномерным подпространством.
16. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Теорема Рисса о представлении функционалов на гильбертовом пространстве.
17. Ортонормированные системы. Неравенство Бе́сселя. Равенство Парсева́ля. Теорема Стекло́ва. Эквивалентность свойств полноты и тотальности в гильбертовом пространстве.
18. Всюду плотность множества $\boldsymbol{C}_0(a,b)$ финитных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_p(a,b)$, $1\leqslant p<\infty$. Тотальность и полнота тригонометрической системы в $\boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu)$, $d\mu=dx/2\pi$.
19. Метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта. Теорема Ри́сса–Фи́шера о изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
20. Преобразование Фурье́ в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни. Формулы умножения, дифференцирования и свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.
21. Лемма о преобразовании Фурье́ финитной неотрицательной функции. Теорема Планшере́ля. Формулы сопряжения, обращения и свертки в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.
22. Сопряженные и эрмитово-сопряженные операторы. Доказательство равенств $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$ и $\|A^*\|=\|A\|$.
23. Лемма о бианнуляторе. Доказательство формул $\ker A=(\operatorname{Im}A^*)_\perp$ и $\ker A^*=(\operatorname{Im}A)^\perp$.
24. Свойства проекторов. Необходимые и достаточные условия дополняемости подпространств в банаховом пространстве.
25. Биортогональные системы. Дополняемость подпространств конечной размерности и конечной коразмерности.
26. Полнота произведения банаховых пространств. Теорема Ба́наха о замкнутом графике.

27. Теорема Ба́наха об обратном операторе.
28. Необходимые и достаточные условия существования левого и правого обратного оператора.
29. Полнота факторпространства банахова пространства. Теорема Ба́наха о гомоморфизме.
30. Теорема о тройке. Доказательство формул $\mathrm{Im}A = (\ker A^*)_\perp$ и $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp$.
31. Теоремы о резольвенте и о спектре ограниченного оператора.
32. Теоремы об отображении спектра и о спектральном радиусе.
33. Предельный спектр ограниченного оператора. Теорема о границе спектра.
34. Свойства компактных операторов в банаховых пространствах. Теорема Ша́удера.
35. Теорема Ри́сса–Ша́удера о спектре компактного оператора в банаховом пространстве.
36. Свойства спектра эрмитова оператора. Критерий Ве́йля.
37. Теорема Ги́льберта–Шми́дта о компактном эрмитовом операторе.
38. Три теоремы Фредго́льма о разрешимости линейных уравнений в банаховом пространстве.
39. Теорема о каноническом операторе Фредго́льма $A = I - K$, где K компактный оператор.
40. Теорема об индексе канонического оператора Фредго́льма.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
5. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Осень 2023 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*