

Программа курса «Функциональный анализ» для потока механиков,
осенний семестр 2023 года. Лектор – доцент Куприков Ю.Е.

1. Метрические и топологические пространства. Сходимость в метрических и топологических пространствах. Критерий замкнутости в метрических пространствах. Описание замыкания через сходимость в метрических пространствах. Неравенство Гельдера. Примеры метрических пространств (\mathbb{R}^p ($p > 0$), \mathbb{R}^∞ , C , C_0 и другие).
2. Полнота. Полнота \mathbb{R}^p ($p > 0$), \mathbb{R}^∞ , C и C_0 . Теорема Кантора о вложенных шарах. Теорема Бэра о категориях.
3. Теорема о пополнении метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений.
4. Теорема Хаусдорфа о максимальной (б/д). Базис Гамеля. Теоремы о свойствах базиса Гамеля.
5. Нормированные пространства. Линейные операторы в нормированных пространствах. Норма линейного оператора. Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного оператора.
6. Принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о пределе последовательности ограниченных операторов. Пример неослабляемости требования полноты.
7. Теорема Банаха об открытом отображении.
8. Теорема Банаха об обратном операторе. Примеры неослабляемости требования полноты. Теорема о замкнутом графике.
9. Теорема Хана-Банаха (действительный случай). Примеры калибровочных функций.
10. Теорема Хана-Банаха (комплексный случай). Теорема о продолжении по Хану-Банаху линейного непрерывного функционала в нормированном пространстве. Принцип аппроксимации.
11. Сопряженное пространство. Его полнота. Каноническое вложение нормированного пространства в его второе сопряженное. Теорема о пополнении нормированного пространства.
12. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в \mathbb{R}^p ($p > 1$).
13. Функции ограниченной вариации и их основные свойства. Теорема о непрерывности вариации по верхнему пределу в точках непрерывности функции ограниченной вариации.
14. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в $C[0,1]$. «Причесьвание» и теорема о единственности производящей функции.
15. Компактность в метрических пространствах. Теорема о свойствах, эквивалентных вполне ограниченности, компактности и предкомпактности.
16. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном нормированном пространстве. Теорема о замкнутости конечномерного подпространства нормированного пространства. Теорема о полноте конечномерного нормированного пространства. Теорема Рисса об ε -перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в б/м нормированном пространстве.
17. Теорема Арцела для $C[0,1]$.
18. Слабая и слабая* сходимость. Критерий слабой сходимости. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся по норме. Теорема Банаха о слабой* секвенциальной компактности единичного шара в пространстве, сопряженном к сепарабельному нормированному. Пример неослабляемости требования сепарабельности.
19. Слабая и слабая* топологии. Задание слабой и слабой* сходимостей через слабую и слабую* топологии. Теорема Алаоглу (б/д). Связь между секвенциальной и топологической компактностью.

20. Гильбертово пространство. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Теорема о расстоянии до выпуклого замкнутого множества. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
21. Ортогональные системы. Теорема об ортогонализации. Ряды Фурье. Экстремальное свойство рядов Фурье. Неравенство Бесселя.
22. Полные ортонормированные системы. Теорема о разложении в ряд Фурье. Равенство Парсеваля. Теорема Рисса-Фишера. Теорема Гильберта об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Лектор
Зав. кафедрой

доц. Куприков Ю.Е.
академик РАН, проф. Кашин Б.С.