Программа курса **«Функциональный анализ»**,
3 курс, 1 поток, 2023-2024 год
Лектор: проф. Шкаликов А.А.

1. Метрические пространства. Полнота. Сепарабельность. Примеры полных и неполных, сепарабельных и несепарабельных пространств. Теорема о пополнении.

2. Лемма о вложенных замкнутых множествах. Теорема Бэра.

3. Компакты в метрических и топологических пространствах. Их свойства.

4. Критерий компактности в метрическом пространстве (полнота и полная ограниченность).

5. Эквивалентность компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности в метрическом пространстве.

6. Критерии полной ограниченности в ℓ_p, $p \geq 1$, и в $C[0,1]$ (привести формулировки, доказательство для одного из пространств).

7. Критерий полной ограниченности в $L_p[0,1]$, $p \geq 1$ (теорема М. Рисса).

8. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза).

9. Теорема об открытости образа сюръективного линейного отображения. Теорема Банаха об обратном операторе.

10. Теорема Банаха об обратном операторе (как следствие из теоремы об открытости образа). Теорема о замкнутом графике.

11. Теорема Хана-Банаха для вещественных линейных пространств.

12. Теорема Хана-Банаха для комплексных линейных пространств.

13. Сопряженное к линейному нормированному пространству, его полнота (как следствие теоремы о полноте пространства $\mathcal{L}(X,Y)$). Равенство $\dim L = \dim L^*$.

14. Изометрическое вложение линейного нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.

15. Теорема о сепарабельности линейного нормированного пространства при условии сепарабельности сопряженного. Доказать нерефлексивность пространства ℓ_1.

16. Базисы в банаховом пространстве. Сопряженное к пространствам c_0 и ℓ_p, $p \geq 1$.

17. Теорема Рисса о пространстве, сопряженном к $C[a,b]$.

18. Полные и замкнутые системы в банаховых пространствах. Эквивалентность этих понятий. Примеры полных систем в банаховых и гильбертовых пространствах.

19. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Функционал $\sqrt{(x,x)}$ обладает свойством нормы. Лемма Рисса о проекции.

20. Теорема об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.

21. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве, процесс ортогонализации. Теорема Пифагора, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

22. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфизм (антилинейный) гильбертовых пространств H и H^*.

23. Эквивалентность свойств полноты, замкнутости и выполнения равенства Парсеваля для ортонормированных систем. Доказать, что полная ортонормированная система есть базис.

24. Лемма об $(1-\varepsilon)$-перпендикуляре, ее усиленная версия для конечномерного подпространства. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.

25. Сильная и слабая сходимости. Эквивалентность сильной и слабой ограниченности множеств (последовательностей) в банаховых пространствах.

26. Слабая и $*-$слабая топологии в банаховом пространстве. Теорема Банаха-Алаоглу (без доказательства). Ее версия для рефлексивных пространств.

27. Секвенциальная $*-$слабая компактность замкнутого единичного шара в X^* при условии сепарабельности банахова пространства X.

28. Секвенциальная слабая компактность замкнутого единичного шара в гильбертовом пространстве.

29. Определения сопряженного оператора, действующего в банаховых и гильбертовых пространствах, отличия. Равенства $\|A\| = \|A^*\|$ и $A = A^{**}$ в гильбертовом пространстве.

30. Компактные операторы. Примеры и свойства компактных операторов. Теорема о равномерном пределе компактных операторов.

31. Доказать, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательсть в сильно сходящуюся.

32. Приближение компактного оператора конечномерными в гильбертовом пространстве. Сопряженный к компактному компактен (доказательство для гильбертова пространства)

33. Спектр и резольвента оператора. Замкнутость спектра оператора. Грубая оценка спектрального радиуса $r(A) \leq \|A\|$.

34. Аналитические свойства резольвенты. Непустота спектра ограниченного оператора.