Программа экзамена по курсу
«Функциональный анализ»
III курс, 4 поток, осенний семестр, 2022
лектор Е.Д. Косов

1. Метрические и нормированные пространства. Открытые и замкнутые множества. Три эквивалентных описания замкнутых множеств. Замыкание множества, его эквивалентное описание. Полнота и банаховость. Пространство ограниченных функций на множестве, его полнота. Всюду плотные множества и сепарабельные пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных бесконечномерных пространства.

2. Непрерывные в точке и непрерывные отображения, их эквивалентные определения. Полнота пространства непрерывных и ограниченных на метрическом пространстве функций. Гомеоморфные и изометричные метрические пространства. Изометричное вложение метрического пространства в пространство ограниченных функций на нем. Пополнение метрического пространства, его существование. Теорема о вложенных шарах и теорема Бэра.

3. Компакты, предкомпакты и вполне ограниченные множества в метрических пространствах и их основные свойства. ε-сети и критерий Хаусдорфа.

4. Равномерная непрерывность непрерывной на компакте функции. Теорема Арцела–Асколи.

5. Эквивалентность всех норм на конечномерном пространстве. Лемма об ε-перпендикуляре. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

6. Евклидовы и гильбертовы пространства. Примеры. Неравенство Коши–Буняковского и норма на евклидовом пространстве. Тождество параллелограмма. Эквивалентное описание ближайшего элемента из подпространства.

7. Существование ближайшего элемента из замкнутого подпространства в гильбертовом пространстве. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства виде прямой суммы замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. Проектор.

8. Ортонормированная система и ортонормированный базис. Теорема об эквивалентном описании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ортогонализация Грамма–Шмидта, существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорме Рисса–Фишера.

9. Ограниченные линейные операторы в нормированных пространствах, эквивалентные определения. Пространство ограниченных линейных операторов и норма в нем, его полнота. Теорема Банаха–Штейнгауза.

10. Сопряженное пространство и норма в нем, его полнота. Базис Гамеля. Существование разрывного линейного функционала на произвольном бесконечномерном нормированном пространстве. Теоремы Рисса о виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве и в $L^p(\mu)$ (доказательство в случае конечной меры).

11. Теорема Хана–Банаха в вещественном случае (доказательство в случае сепарабельного пространства).

12. Теорема Хана–Банаха в комплексном случае. Следствия из теоремы Хана–Банаха: различимость векторов функционалами, каноническое вложение пространства во второе сопряженное и его изометричность. Рефлексивные пространства. Примеры.

13. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.

14. Сопряженный оператор в случае общих нормированных пространств, его норма. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Существование и примеры. Основные свойства сопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Разложение гильбертова пространства в виде прямой суммы замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Вычисление нормы самосопряженного оператора через его квадратичную форму.

15. Компактные операторы и их основные свойства. Компактность оператора, сопряженного к компактному, в гильбертовом пространстве.

16. Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвента и резольвентное множество. Основные свойства спектра, как подмножества $\mathbb{C}$. Последовательность Вейля.

17. Теорема Гильберта–Шмидта.

18. Лемма о ядре и образе оператора вида тождественный минус компактный. Спектр компактного оператора.