Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» *(3 курс, отделение механики)*

1. Локально выпуклая топология (сходящиеся последовательности, полнота, ограниченные множества, непрерывные отображения, эквивалентные системы полунорм, хаусдорфовость).

2. Теорема о метризуемости локально выпуклого пространства. Метризуемость и полнота пространства $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемых функций.

3. Локально выпуклая топология в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ (хаусдорфовость, ограничение топологии $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ на подпространство $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, непрерывные отображения, ограниченные множества).

4. Неметризуемость и полнота пространства $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ основных функций. Теорема о слабой* полноте пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ обобщенных функций.

5. Действия с обобщенными функциями в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ (умножение на функцию, дифференцирование, формула Ле́йбница, сдвиг, растяжение, замена переменных).

6. Теорема об обобщенных функциях с компактным носителем. Доказательство непрерывности и инъективности вложения $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

7. Усреднение функции в смысле Со́болева и его свойства. Плотность множества основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

8. Регулярные обобщенные функции. Метризуемость и полнота пространства $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$. Доказательство непрерывности и инъективности вложения $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

9. Производные в смысле Со́болева локально интегрируемых функций из $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$. Теорема о полноте пространств Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $k \in \mathbb{N}$.

10. Плотность множества $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ основных функций в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Доказательство непрерывности и инъективности вложения $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

11. Преобразование Фурье́ функции $e^{-x^2/2}$. Непрерывность и биективность преобразования Фурье́ в пространстве Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

12. Непрерывность и биективность преобразования Фурье́ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Формулы сдвига, дифференцирования и преобразования Фурье́ обобщенных функций из $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$.

13. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни. Формулы умножения, обращения, дифференцирования и свертки для преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

14. Теорема Планшере́ля. Формулы умножения, обращения и свертки для преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

15. Теорема о том, что функции Эрми́та образуют в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́.

16. Лемма о почти открытом отображении банахова пространства. Теорема Ба́наха о гомоморфизме и теорема Ба́наха об обратном операторе.

17. Доказательство полноты факторпространства банахова пространства и гомоморфизма его факторотображения. Теорема о трех гомоморфизмах.

18. Доказательство полноты произведения банаховых пространств. Определение замкнутого линейного оператора и его замыкания. Теорема Ба́наха о замкнутом графике.

19. Замкнутость аннулятора и слабая* замкнутость аннулятора*. Лемма о бианнуляторах. Равенство замыкания и слабого замыкания линейного подпространства.

20. Сопряженный оператор A' к ограниченному оператору A. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного. Доказательство формул $\mathrm{Im}A = (\ker A')_\perp$ и $\mathrm{Im}A' = (\ker A)^\perp$ для операторов с замкнутым образом.

21. Эрмитово-сопряженный оператор к линейному оператору в гильбертовом пространстве (линейность, замкнутость и ограниченность). Определение симметрических, самосопряженных и эрмитовых операторов. Теорема Хе́ллингера–Тёплица.

22. Голоморфные функции со значениями в банаховом пространстве. Теорема Да́нфорда, теорема Коши́ и интегральная формула Коши́.

23. Голоморфные функции со значениями в банаховом пространстве. Разложение функции в ряд Те́йлора, теорема Лиуви́лля, формула Коши́–Адама́ра.

24. Спектр и резольвента ограниченного оператора в банаховом пространстве. Теоремы о резольвенте, о спектре и о спектральном радиусе.

25. Спектр и резольвента сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов. Структура спектра. Лемма об операторе обратимом слева. Теорема о границе спектра.

26. Теорема об отображении спектра. Равенство спектров для эквивалентных операторов. Структура спектра оператора свертки в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с функцией из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

27. Свойства компактных операторов в нормированном пространстве. Теорема Ша́удера о компактности сопряженного оператора.

28. Теорема Ри́сса–Ша́удера о спектре компактного оператора в банаховом пространстве.

29. Свойства проекторов. Критерий дополняемости подпространства в банаховом пространстве. Дополняемость подпространств конечной размерности и конечной коразмерности.

30. Операторы Фредго́льма в банаховых пространствах. Лемма о замкнутости их образа. Теорема о каноническом операторе Фредго́льма $A = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}$, где $\boldsymbol{K}$ компактный оператор.

31. Три теоремы Фредго́льма о разрешимости уравнений в банаховом пространстве. Теорема об индексе канонического оператора Фредго́льма.

32. Теорема Нико́льского об операторах Фредго́льма. Устойчивость операторов Фредго́льма при компактных возмущениях. Существенный спектр оператора.

33. Свойства спектра эрмитова оператора. Теорема Ве́йля. Теорема Ги́льберта–Шми́дта.

34. Интегральный оператор Ги́льберта–Шми́дта в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. Теоремы Шми́дта о сходимости, о разложении ядра и о представлении резольвенты.

35. Задача Шту́рма–Лиуви́лля. Функция Гри́на. Теорема существования решения. Теорема о полноте собственных функций оператора Шту́рма–Лиуви́лля в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».
2. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике».
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики. Т.1».
7. Смирнов В. И. «Курс высшей математики». Том IV.
8. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».

Весна 2022 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*